UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01182481 0

285 87

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

Weierstrass

Mat
W448

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

DRITTER BAND.

ABHANDLUNGEN III.

MIT BILDNISS DES VERFASSERS.

6050
16/9/03

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1903.

Übersetzungsrecht vorbehalten.

QA
3
W45
Bd. 3

VORWORT.

Der vorliegende Band enthält hauptsächlich den Rest der Abhandlungen, die von Weierstrass selbst für den Abdruck bestimmt worden sind oder sich in seinem Nachlass vorgefunden haben. Einige Abhandlungen sind nach Notizen oder mündlichen Mittheilungen für die Veröffentlichung ausgearbeitet worden, und zwar von den Herren E. Kötter (Nr. 9 des Inhalts-Verzeichnisses), R. Rothe (Nr. 12), F. Schottky (Nr. 20) und H. A. Schwarz (Nr. 9, 12, 14).

Der Band war bereits im Anfang des Jahres 1897 zur Hälfte im Druck vollendet. Sein Erscheinen hat sich bis jetzt verzögert, weil auf Weierstrass' Wunsch zuerst der vierte, die Vorlesungen über Abelsche Transcendenten enthaltende fertiggestellt worden ist.

Berlin, den 13. Februar 1903.

Johannes Knoblauch.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

1. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente . . . . . 1—37.
   (Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, S. 633—639, 789—805.)
2. Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist . . . . . 39—52.
   (Umarbeitung einer am 25. Juni 1866 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gelesenen, in den Monatsberichten der Akademie, 1866, S. 612—625, auszugsweise abgedruckten Abhandlung.)
3. Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen . . . . . 53—114.
4. Über die Convergenz der Θ-Reihen beliebig vieler Argumente . . . 115—122.
5. Verallgemeinerung einer Jacobi'schen Thetaformel . . . . . 123—137.
   Anmerkung . . . . . 138.
6. Nachtrag zu der am 4. März 1858 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung: Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem . . . . . 139—148.
   (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1879, S. 430—439.)
7. Über die Bedingungen der Zerlegbarkeit einer ganzen rationalen Function von mehr als zwei Veränderlichen . . . . . 149—153.
8. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen 155—159.
   (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, S. 505—508.)
9. Rein geometrischer Beweis des Hauptsatzes der projectivischen Geometrie 161—174.
10. Zur Dioptrik . . . . . 175—178.
11. Zwei specielle Flächen vierter Ordnung . . . . . 179—181.
    (Aus Jacob Steiner's Gesammelten Werken, Bd. II (Berlin 1882), S. 741—742, mit geringer Veränderung abgedruckt.)
    Anmerkung . . . . . 182.
12. Über eine die Raumcurven constanter Krümmung betreffende, von Delaunay herrührende Aufgabe der Variationsrechnung . . . . . 183—217.
    Anmerkung . . . . . 218.
13. Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen . . . . . 219—220.
    (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, S. 855—856.)

Seite

14. Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächenstücke, deren Begrenzung aus geradlinigen, ganz im Endlichen liegenden Strecken besteht . . . . . 221—238.
Anmerkung . . . . . 239.

15. Über eine besondere Gattung von Minimalflächen . . . . . 241—247.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1867, S. 511—518.)
Anmerkung . . . . . 248.

16. Einfacher Beweis eines Hermiteschen Satzes . . . . . 249—250.
Anmerkung . . . . . 250.

17. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen . . . . . 251—269.
(Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1891, S. 1085—1101.)
Anmerkung . . . . . 270.

18. Zur Determinantentheorie . . . . . 271—286.
Anmerkung . . . . . 287.

19. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen . . . . . 289—294.
Anmerkung . . . . . 295.

20. Über Normalformen algebraischer Gebilde . . . . . 297—307.
Anmerkung . . . . . 308.

21. Zur Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen . . . 309—312.

Anhang.

22. Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte . . . . . 315—329.
(Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone vom Herbst 1844 bis zum Herbst 1845, S. 1—11.)

23. Ansprache bei der Übernahme des Rectorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15. October 1873 . . . . . 331—339.

24. Rede zur Gedächtniss-Feier der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 3. August 1874 . . . . . 341—349.
(Unter diesem Titel als Universitätsschrift erschienen; Berlin 1874.)

25. Zu E. E. Kummers fünfzigjährigem Doctorjubiläum . . . . . 351—354.

26. Verzeichniss der von Weierstrass an der Universität zu Berlin gehaltenen und angekündigten Vorlesungen . . . . . 355—360.

Anmerkungen . . . . . 361.

Anmerkungen und Berichtigungen zum ersten, zweiten und vierten Bande . . . . 362.

ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLBARKEIT SOGENANNTER WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN REELLER ARGUMENTE.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)

1.

Das Hauptergebniss der nachstehenden Untersuchung lässt sich, wenn man sich zunächst auf Functionen einer Veränderlichen beschränkt, folgendermaassen aussprechen:

Es sei x eine reelle Veränderliche, welche jeden dem Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$ angehörigen Werth annehmen kann, ferner bedeute $f(x)$ eine reelle und durchweg continuirliche Function von x, so lässt sich stets auf mannigfaltige Weise eine Reihe von ganzen Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ der Art bilden, dass für jeden der betrachteten Werthe von x

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

ist. Dabei ist die Reihe $f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergent.

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du, \tag{2.}$$

so ist

$$\lim_{k=0} F(x,k) = f(x). \tag{3.}$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1.) und (3.) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\quad = \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\quad = f(-b_1 \cdots -a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + f(a_2 \ldots b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du.^*)
\end{aligned}$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x)$, $\psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten

*) Ich bezeichne mit $f(x_1 \ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt.

endlichen Grenze nähert, und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$\begin{aligned}
F(x,k) &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\quad + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \frac{1}{2\omega} f(-\infty \ldots x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta\cdots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku))\,\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(x,k)-f(x) &= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x))\,\psi(u)\,du \\
&= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_1 (f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)),
\end{aligned}$$

wo ε, ε_1 positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2}(f(x-u)+f(x+u)-2f(x))$$

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1 \dots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0 \dots \delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $< k'$,

$$\frac{2G}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du < g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x,k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g_1+g_2 ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x,k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x,k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in beständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-x^2}$, so ergiebt sich der folgende Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente ganze Function $F(x,k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\lim_{k=0} F(x,k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen

$F(x, k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x, k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x, k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so an, dass $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat; dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x), \quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x)$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\lim_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu, \qquad (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu)$$
$$|f(x) - G_{\nu+1}(x)| < g_{\nu+1}, \qquad (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1})$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \dots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \quad \text{wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und gleichmässig für die dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe con-

vergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes B. ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x,k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\,\psi\Big(\frac{u-x}{k}\Big)du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x,k) = F_1(x,k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{k}}^{+\infty} f(x+ku)\,\psi(u)\,du$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen werden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x,k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x,k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine ganze rationale Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|G(x) - F_1(x,k)| < g_2,$$

also

$$|f(x) - G(x)| < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz B. giebt.

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \dots x_2)$ so genau an-

schliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\omega k^\nu \nu!} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist, Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Ubelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen.

Diesem Übelstande lässt sich aber folgendermaassen abhelfen.

Es bedeute $f(x)$, wie im Vorhergehenden, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x) = \psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u + vi)\,\psi(u - vi)} = \psi(u, v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist

der absolute Betrag von $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$(4.)\quad \int_a^b f(u)\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)\,du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty}\psi(u,v)\,du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2}\psi(u,v)\,du, \quad \int_{-b_1}^{-a_1}\psi(u,v)\,du,$$

von denen das zweite (weil $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$) gleich

$$\int_{a_1}^{b_1}\psi(u,v)\,du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, a_2 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi)\,du, \quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi(u+vi)\,du;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\,du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty}\psi(u,v)\,du,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, gleichmässig

gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (4.) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie im Vorangehenden, k eine positive Constante, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\,du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

$$(5.) \qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\Big(\frac{u-x}{k}\Big)\,du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die oben mit $F(x,k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x,k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere a_1, a_2 bestimmen, für welche der absolute Betrag der Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{a_1+\xi}{k}} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{a_2-\xi}{k}}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2 + \xi'^2 \leqq r^2$$

entsprechenden Werthe von ξ, ξ' kleiner als g' ist. Dann hat man

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g', \tag{6.}$$

wo ε' eine Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bedeutet. Das Integral auf der Rechten dieser Gleichung lässt sich aber in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickeln, und man kann, wenn die Summe der n ersten Glieder von $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ mit $G^{(n)}(x)$ bezeichnet wird, n so gross annehmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x,k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

ist.

Dies festgestellt, kann man ferner durch das zur Begründung des Satzes C. angewandte Verfahren zeigen, dass $F(x,k)$ sich darstellen lässt in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind, und dass diese Reihe für alle in irgend einem endlichen Bereiche enthaltenen Werthe von x gleichmässig convergirt. Man hat zu dem Ende zwei Reihen positiver Grössen

$$r_1, r_2, r_3, \cdots,$$
$$g_1, g_2, g_3, \cdots$$

so anzunehmen, dass $\lim_{n=\infty} r_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ einen endlichen Werth hat, sodann eine Reihe von ganzen rationalen Functionen $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$ so zu bestimmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r_\nu$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x,k) - G_\nu(x)| < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty) \tag{7.}$$

ist, und

$$f_0(x) = G_1(x), \quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x) \tag{8.}$$

zu setzen; dann ist

$$F(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x). \tag{9.}$$

Nach einem Satze aber, den ich früher (Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre 1880, S. 723*)) in elementarer Weise bewiesen habe, kann man die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung, weil sie in jedem endlichen

*) [Vgl. Bd. II, S. 205 dieser Ausgabe.]

Bereiche gleichmässig convergirt, in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandeln.

Nimmt man

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

so ist

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

und diese Function $\psi(u, v)$ hat die im Vorstehenden angenommene Beschaffenheit. Dasselbe ist der Fall, wenn man

$$\psi(x) = e^{-(c_1 x^2 + c_2 x^4 + \cdots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

setzt und der Constante c_ϱ einen positiven Werth giebt, während $c_1, \ldots c_{\varrho-1}$ beliebige reelle Werthe haben können.

Es existiren also in der That, wie bei Begründung des Satzes A. angegeben worden ist, unzählige Functionen $\psi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ transcendente ganze Functionen sind.

Jetzt bedeute $F(x, k)$ irgend eine bestimmte von diesen Functionen, so lässt sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, durch welche dieselbe dargestellt werden kann, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende, ebenfalls für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe verwandeln. Aus dem bekannten Satze des Herrn C. Neumann, betreffend die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen x nach den Kugelfunctionen erster Art, ergiebt sich nämlich unmittelbar, dass jede (transcendente oder rationale) ganze Function $G(x)$ dargestellt werden kann durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \mathrm{P}^{(\nu)}(x).*)$$

---

*) Dies lässt sich übrigens auch folgendermaassen beweisen. Aus der Definition der Kugelfunctionen ergiebt sich:

$$|\mathrm{P}^{(n)}(x)| \leqq |x+\sqrt{x^2-1}|^n,$$

wenn man $\sqrt{x^2-1}$ so bestimmt, dass $|x+\sqrt{x^2-1}| \geqq 1$ ist. Ferner ist

$$x^n = c_{n,0}\mathrm{P}^{(n)}x + c_{n,1}\mathrm{P}^{(n-2)}(x) + \cdots,$$

und somit, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind so beschaffen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

für jeden positiven Werth r einen endlichen Werth hat. Ferner ist die Reihe für alle einem endlichen Bereiche angehörigen Werthe von x gleichmässig convergent. (Vergl. die Abhandlung des Herrn Thomé: »Über die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten«, Borchardt's Journal, Bd. 66, S. 337.) Auf der letzteren Eigenschaft der Reihe beruht es, dass man

$$\int_{-1}^{+1} G(x') \mathrm{P}^{(\mu)}(x') dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\mu)}(x') \mathrm{P}^{(\nu)}(x') dx'$$

hat, wo x' eine reelle Veränderliche bezeichnet; woraus sich

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') \mathrm{P}^{(\mu)}(x') dx' \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty)$$

ergiebt.

Für die Function $F(x, k)$ hat man also

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \cdot \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$
$$= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku) \psi(u) du;$$

---

eine beständig convergirende Potenzreihe von x ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x).$$

Es sind aber die $c_{n,\nu}$ sämmtlich positive Grössen und $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$; also ist

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_\nu |A_n c_{n,\nu} \mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)|$ eine endliche Grösse ist, und daher, wenn (für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \infty$)

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu}$$
$$(n-2\nu = \mu)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu \mathrm{P}^{(\mu)}(x)$$

besteht.

woraus man, wenn

$$\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx' = f_\nu(u)$$

gesetzt wird,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

erhält.

Die Function $f_\nu(u)$ ist ebenso wie $f(u)$ eine durchweg stetige Function, deren absoluter Betrag höchstens gleich $(2\nu+1)G$ werden kann, da der absolute Betrag von $\mathrm{P}^{(\nu)}(x')$ für die dem Intervalle $(-1\cdots+1)$ angehörigen Werthe von x' nicht grösser als 1 wird. Es ist aber, wenn a eine beliebige positive Grösse ist,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

und

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{a}^{+\infty}|\psi(u)|\,du,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{-\infty}^{-a}|\psi(u)|\,du;$$

wenn man daher k unendlich klein werden lässt, so bekommt man

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\cdot\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder auf der Rechten unendlich kleine Werthe erhalten, wenn a unendlich gross wird. Da man nun a beliebig gross annehmen darf, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Setzt man

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \varphi_\nu(k),$$

und versteht unter δ eine reelle Grösse, deren absoluter Betrag kleiner ist als k, so ist

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo wieder die fortgelassenen Glieder auf der Rechten beliebig kleine Werthe

erhalten, wenn a gross genug angenommen wird. Ist daher δ_1 eine gegebene, beliebig kleine positive Grösse, so kann man dem a einen bestimmten Werth beilegen, für welchen

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)-\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_1 ist, und zwar bei beliebigen Werthen von k und δ. Dann lässt sich ferner, wenn δ_2 eine zweite, beliebig anzunehmende positive Grösse ist, für den absoluten Betrag von δ eine obere Grenze δ' so festsetzen, dass

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_2, und somit

$$|\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)|<\delta_1+\delta_2$$

ist, wenn $|\delta|<\delta'$. Es ist also $\varphi_\nu(k)$ eine stetige Function von k.

Hiermit ist also bewiesen:

»Ist $\psi(x)$ eine Function von der oben angegebenen Beschaffenheit, und

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für jeden endlichen complexen Werth von x

$$F(x,k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(k)\,\mathrm{P}^{(\omega)}(x), \tag{10.}$$

wenn

$$\left\{\begin{array}{l} f_\nu(u)=\dfrac{2\nu+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\omega)}(x')\,dx' \\ \varphi_\nu(k)=\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \end{array}\right. \tag{11.}$$

gesetzt wird; und es sind dann die $\varphi_\nu(k)$ stetige Functionen von k.«

Jetzt werde unter x wieder eine reelle Veränderliche verstanden, so dass

$$f(x)=\operatorname*{Lim}_{k=0}F(x,k)$$

ist. Wird dann x auf das Intervall

$$-a\leqq x\leqq a$$

beschränkt, wo a eine beliebige positive Grösse bedeutet, so kann man, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', zunächst dem Parameter k einen bestimmten Werth k' beilegen, für welchen

$$|f(x)-F(x,k')|<g'$$

ist. Bezeichnet man ferner mit R den grössten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$x+\sqrt{x^2-1}$$

für die jetzt betrachteten Werthe von x erhalten kann, so hat man

$$R=\begin{cases} 1, & \text{wenn } a\leqq 1,\\ a+\sqrt{a^2-1}, & \text{wenn } a>1,\end{cases}$$

und es folgt daher aus dem oben Bemerkten

$$|P^{(\nu)}(x)|\leqq R^\nu.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(k')|R^\nu$$

einen endlichen Werth hat, so ist es nach Annahme einer zweiten positiven Grösse g'' immer möglich, eine ganze positive Zahl n zu ermitteln, für welche der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\varphi_\nu(k')P^{(\nu)}(x)$$

kleiner als g'' ist. Setzt man also

$$G^{(n)}(x,k)=\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_\nu(k)P^{(\nu)}(x), \tag{12.}$$

so ist

$$|f(x)-G^{(n)}(x,k')|<g'+g''.$$

Hiernach lässt sich der obige Satz B. folgendermaassen aussprechen:

»Es seien a, g positive Grössen, von denen die erste beliebig gross und die andere beliebig klein angenommen werden kann, so ist es immer möglich, in dem durch die Gleichung (12.) definirten Ausdruck $G^{(n)}(x,k)$, der eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x ist, dem Parameter k und der Zahl n solche Werthe zu geben, dass für die dem Intervall $(-a\ldots a)$

angehörigen Werthe von x die Differenz zwischen

$$f(x) \text{ und } G^{(m)}(x, k)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g ist.«

Der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck der Function $F(x, k)$ hat vor der Darstellung derselben in Gestalt einer Potenzreihe den wesentlichen Vorzug, dass die Coefficienten des ersteren — die $\varphi_\nu(k)$ — in einer Form sich darstellen, welche erkennen lässt, dass dieselben stetige Functionen der Grösse k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Werth von k überschreitet, während zugleich, für jeden bestimmten Werth von k, $\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(k) = 0$ ist.

Damit ist der Übelstand beseitigt, welcher sich, wie vorhin hervorgehoben worden ist, herausstellt, wenn man die im Satze B. vorkommende Function $G(x)$ so definirt, wie es bei der Ableitung dieses Satzes zuerst geschehen ist.

Es ist bisher in Betreff der Function $f(x)$ angenommen worden, dass der absolute Betrag derselben eine endliche obere Grenze habe. Diese Annahme kann man fallen lassen, wenn es sich bloss darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x)$ zu bestimmen, welche sich in einem gegebenen endlichen Intervall $(x_1 \dots x_2)$ der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der absolute Betrag der Differenz $f(x) - G(x)$ für jeden Werth von x unter einer beliebig festgesetzten Grenze g liegt.

In der That, definirt man eine Function $f_1(x)$, indem man festsetzt, es sei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) \quad \text{für} \quad x < x_1, \\ f_1(x) &= f(x) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ f_1(x) &= f(x_2) \quad \text{für} \quad x > x_2, \end{aligned}$$

so ist $f_1(x)$ so beschaffen, wie bisher von der Function $f(x)$ angenommen worden ist, und man kann demnach eine Function $G(x)$ so bestimmen, dass für jeden in dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ enthaltenen Werth von x

$$|f_1(x) - G(x)| < g,$$

und somit auch

$$|f(x) - G(x)| < g$$

ist.

Nun ist bei dem Beweise des Satzes C. von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt worden, dass es nach beliebiger Annahme zweier positiven Grössen a_ν, g_ν möglich sei, eine ganze rationale Function $G_\nu(x)$ herzustellen, für welche

$$|f(x)-G_\nu(x)|<g_\nu \text{ ist, wenn } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu;$$

und es gilt also der in Rede stehende Satz in unveränderter Fassung, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, dass sie für jeden endlichen reellen Werth von x einen bestimmten endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth habe.

Es bliebe jetzt noch zu untersuchen, welche Modificationen die bisher entwickelten Sätze erleiden, wenn man auch die Annahme, dass $f(x)$ eine durchweg stetige Function sei, fallen lässt. Damit werde ich mich hier jedoch nicht beschäftigen.

Ich will jetzt annehmen, es sei $f(x)$ eine periodische Function, d. h. sie ändere ihren Werth nicht, wenn ihr Argument um eine bestimmte positive Grösse $2c$ vermehrt wird. Dann lässt sich die zugehörige Function $F(x,k)$ auch darstellen in der Form einer für jeden complexen Werth von x convergirenden Fourier'schen Reihe, deren Coefficienten stetige Functionen der Grösse k sind.

Aus der obigen Gleichung (5.) ergiebt sich

$$F(x+2c,k) = F(x,k);$$

setzt man also, unter z eine neue complexe Veränderliche verstehend,

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z, k\right),$$

so ist $\overline{F}(z)$ eine eindeutige analytische Function von z, für welche im ganzen Gebiete dieser Grösse nur zwei singuläre Stellen, nämlich 0 und ∞ existiren, und die daher in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu$$

entwickelt werden kann. Setzt man $z = e^{\frac{\pi x}{c} i}$, so wird $\overline{F}(z) = F(x, k)$, und es ist demnach

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu\pi x}{c} i}$$

für jeden endlichen Werth von x.

Da diese Entwickelung von $F(x, k)$ in jedem endlichen Bereiche der Veränderlichen x gleichmässig convergirt, so ist, wenn man mit x' wieder eine reelle Veränderliche und mit n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k) e^{-\frac{n\pi x'\pi}{c} i} dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c} i} dx' = C_n.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 2cC_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\,du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{\frac{nku\pi}{c} i} du \int_{-c}^{c} f(x'+ku) e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku) i} dx'. \end{aligned}$$

Nun hat man aber, wenn man

$$f_1(x') = f(x') e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}$$

setzt und unter x_0 eine von x' unabhängige Grösse versteht,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{c} f_1(x')\,dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')\,dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' = \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' = \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)\,dx'; \end{aligned}$$

es ist also

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku) e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku) i} dx' = \int_{-c}^{c} f(x') e^{-\frac{n\pi x'}{c} i} dx',$$

und somit, wenn man, unter v eine beliebige reelle Grösse verstehend,

$$\text{(13.)} \qquad \varphi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{uvi} du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u)\cos(vu)\,du$$

setzt,

$$C_n = \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c}\frac{1}{2c}f(x')\,e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx'. \tag{14.}$$

Setzt man

$$A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(x')\cos\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx', \quad A_n' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(x')\sin\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx', \tag{15.}$$

so ist

$$C_n = (A_n - iA_n')\,\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) \tag{16.}$$

und somit

$$F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\cdot\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A_n'\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right). \tag{17.}$$

Nach der Formel (13.) ist $\varphi(v)$ eine stetige Function von v, die für $v = 0$ den Werth 1 annimmt.

Setzt man in dem Ausdrucke auf der Rechten der vorstehenden Gleichung $k = 0$, so reducirt er sich auf

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A_n'\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right),$$

d. h. er geht in die Reihe über, in welche sich die Function $f(x)$ im Allgemeinen — d. h. wenn man von speciellen, bisher noch nicht hinreichend charakterisirten Functionen absieht — nach dem Fourier'schen Theorem entwickeln lässt. Da aber, wie zuerst Herr P. du Bois-Reymond an einem Beispiele nachgewiesen hat, in der That Functionen $f(x)$ existiren, welche für gewisse Werthe von x, die sogar in jedem noch so kleinen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, durch die vorstehende Reihe nicht dargestellt werden, so ist damit dargethan, dass man, um die Grenze zu bestimmen, der sich die Reihe auf der Rechten der Gleichung (17.) nähert, wenn k unendlich klein wird, nicht unbedingt in jedem einzelnen Gliede der Reihe $k = 0$ setzen darf.

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ convergirt, wie gezeigt worden ist, für jeden Werth von z, mit Ausnahme der beiden Werthe $0, \infty$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

convergirt also für jeden endlichen Werth von z.

Nimmt man nun z. B.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right),$$

so ist

$$A_n = \frac{1}{n^2}, \quad A'_n = 0$$

und daher

$$C_n = \frac{1}{n^2} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

daraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt.

Setzt man also

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(nv) e^{nxi}, \tag{18.}$$

so ist $\chi(x; v)$ eine für jeden endlichen complexen Werth von x und für jeden von Null verschiedenen reellen Werth von v definirte eindeutige analytische Function, für welche sich auch, da $\varphi(-v) = \varphi(v)$ ist, der Ausdruck

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(nv) \cos nx = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(nv) \cos nx \tag{19.}$$

ergiebt; und es lässt sich dann die Function $F(x, k)$ folgendermaassen ausdrücken:

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c} \pi; \frac{k\pi}{c}\right) dx'. \tag{20.}$$

Jetzt seien wieder g', g'' gegebene positive Grössen von beliebiger Kleinheit, und k' ein bestimmter Werth von k, der so anzunehmen ist, dass

$$|f(x) - F(x, k')|$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g' ist. Bestimmt man dann eine ganze positive Zahl n so, dass der absolute Betrag von

$$2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right) \left(A_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{c} x\right) + A'_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{c} x\right)\right)$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g'' ist, und setzt

$$(21.) \qquad f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right) + R_n,$$

so ist der absolute Betrag von R_n stets kleiner als $g'+g''$.

So ergiebt sich der Satz

D. »Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine endliche Fourier'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Werth von x mehr als g beträgt.«

Aus diesem Satze lässt sich dann durch das beim Beweise des Satzes C. angewandte Verfahren, wenn man unter den dortigen Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$ $G_3(x)$, ... jetzt endliche Fourier'sche Reihen versteht, welche dieselbe primitive Periode wie $f(x)$ haben, der folgende ableiten:

E. »Jede Function $f(x)$ von der unter D. angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämmtlich endliche Fourier'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für alle Werthe von x.«

Um das Vorstehende durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehme ich

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Dann ist $2\omega = \sqrt{\pi}$ und

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+uvi}\,du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u-\frac{vi}{2}\right)^2}\,du = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$(22.) \qquad \chi(x;v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

also, wenn man

$$(23.) \qquad q = e^{-\frac{v^2}{4}}$$

setzt,

$$(24.) \qquad \chi(x;v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right),$$

wo $\vartheta_3(x, q)$ die Jacobi'sche Function

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots$$

ist.

Hiernach hat man für $q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}$

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x-x'}{2c}\pi, q\right)dx'. \tag{25.}$$

Die Formel auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt schon bei Fourier vor (Théorie analytique de la chaleur, Chapitre X). Um den Temperaturzustand eines unendlich dünnen homogenen Ringes von der Länge $2c$, der keine Wärme ausstrahlt, für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, wenn derselbe in irgend einem Momente bekannt ist, hat man eine Function φ von zwei reellen Veränderlichen x, t so zu bestimmen, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

genügt, wo μ eine positive Constante bedeutet, als Function von x betrachtet die Periode $2c$ besitzt und für $t = 0$ in dem Intervalle

$$-c \leqq x \leqq c$$

einer gegebenen willkürlichen Function $F(x)$ gleich ist, wobei nur angenommen wird, dass $F(x)$ stetig und $F(-c) = F(c)$ sei.

Fourier findet für die so definirte Function φ den Ausdruck

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx', \end{aligned}\right. \tag{26.}$$

also

$$\varphi = F(x,k), \tag{27.}$$

wenn man die Function $f(x)$ so bestimmt, dass sie in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ mit $F(x)$ übereinstimmt, und

$$k = 2\sqrt{\mu t} \tag{28.}$$

nimmt. Fourier setzt, um zu beweisen, dass φ für $t = 0$ in dem Intervalle

$(-c \leqq x \leqq c)$ gleich $F(x)$ sei, in den einzelnen Gliedern seines Ausdrucks $t = 0$, wodurch derselbe in die Reihe

$$\frac{1}{2c} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-c}^{c} F(x') \cos\left(\nu \frac{x-x'}{c} \pi\right) dx'$$

übergeht, von der er annahm, dass sie stets in dem angegebenen Intervall die Function $F(x)$ darstelle. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass ungeachtet der Einwendungen, die gegen Fourier's Verfahren gemacht werden können, der aufgestellte Ausdruck der Function φ ausnahmslos richtig ist. Denn da derselbe, wie gezeigt worden ist, sich in $F(x, 2\sqrt{\mu t})$ umformen lässt, so ergiebt sich zunächst, ohne dass das Fourier'sche Theorem zu Hülfe genommen wird, dass

$$\lim_{t=0} \varphi = F(x)$$

ist. Ferner genügen die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

woraus folgt, dass auch φ selbst ihr genügt, da die in Rede stehende Reihe eine eindeutige analytische Function von x und t ist, wenn man die Grösse t der Bedingung unterwirft, dass ihr reeller Bestandtheil positiv sein soll, und weil überdies die Reihe in jedem endlichen Bereiche der Grössen x, t gleichmässig convergirt. Endlich ändert die Reihe ihren Werth nicht, wenn $x + 2c$ für x gesetzt wird; es entspricht also die durch sie ausgedrückte Function vollständig den gestellten Bedingungen.

Es ist äusserst merkwürdig, dass bei einem Problem der mathematischen Physik für eine gesuchte, von zwei veränderlichen Grössen, die nach ihrer physikalischen Bedeutung nur reelle Werthe haben können, abhängige Function, welche für einen bestimmten Werth eines ihrer Argumente einer gegebenen willkürlichen Function des anderen gleich sein soll, ein Ausdruck sich ergiebt, der eine analytische Function der Veränderlichen ist und somit auch für complexe Werthe der letzteren eine Bedeutung hat.

Es bedeute jetzt n eine ganze positive Zahl, und es werde gesetzt

$$\chi(x; v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 t^2}{4}} \cos \nu x,$$

so ist nach Gleichung (22.)

$$\chi(x;v) = \chi(x;v)_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Für reelle Werthe von x ist aber der absolute Betrag des zweiten Gliedes auf der Rechten dieser Gleichung, der mit R_n bezeichnet werde, niemals grösser als

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2},$$

also

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2} \cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Setzt man nun in der bekannten Gleichung

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau \pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 \pi}{\tau}}\right),$$

wo unter τ eine positive Grösse zu verstehen ist, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, so ergiebt sich, wenn v positiv ist,

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

es ist also

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4} v^2} \cdot \left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Setzt man nun, unter m eine positive Grösse verstehend,

$$v = \frac{2\sqrt{m \log(n+1)}}{n+1}, \tag{29.}$$

so ist

$$R_n < \frac{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{-m+1}}{\sqrt{m \log(n+1)}} \cdot (1 + [n]),$$

wo $[n]$ eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Nimmt man also

$$m \geqq 1,$$

so wird

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Es ist aber dann

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m\log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}},$$

also, wenn man

$$(n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} = \{n\} \tag{30.}$$

und

$$\chi(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu^2} \cos \nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \{n\}^{\nu^2} \cos \nu x \tag{31.}$$

setzt,

$$\chi(x;v)_n = \chi(x,n).$$

Aus der Gleichung

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi; \frac{k\pi}{c}\right)dx'$$

ergiebt sich dann

$$F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi; v\right)dx' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right)dx' + R'_n,$$

wo auch R'_n eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Da nun $\operatorname{Lim}_{n=\infty} v = 0$ und $\operatorname{Lim}_{v=0} F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$ ist, so ergiebt sich

$$f(x) = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right)dx'. \tag{32.}$$

Das Fourier'sche Theorem, präcise ausgedrückt, besagt, dass

$$f(x) = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x')\bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right)dx' \tag{33.}$$

sei, wenn

$$\bar{\chi}(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \cos \nu x \tag{34.}$$

gesetzt wird. An die Stelle dieser Gleichung, die nicht unter allen Umständen richtig ist, tritt also die vorhergehende, ausnahmslos geltende, in der die Function $\bar{\chi}(x,n)$ ersetzt ist durch eine andere, $\chi(x,n)$, welche gleich $\bar{\chi}(x,n)$ die Form

$$1 + 2(n,1)\cos x + 2(n,2)\cos 2x + \cdots + 2(n,n)\cos nx$$

hat, wo (n,ν) eine von n und ν abhängende positive Grösse bedeutet, die in

$\chi(x)$ sich auf die Einheit reducirt. Für jede bestimmte Zahl ν ist

$$\lim_{n=\infty}(n, \nu) = 1;$$

man kann also n so gross nehmen, dass die $(\nu+1)$ ersten Glieder von $\chi(x, n)$ mit den entsprechenden Gliedern von $\bar{\chi}(x, n)$ so nahe übereinstimmen, wie man will.

Functionen $\chi(x, n)$ von derselben Form und Beschaffenheit, wie die hier betrachtete, für welche die Gleichung (32.) ebenfalls unbedingte Gültigkeit hat, lassen sich auch aus der obigen Function $\chi(x; v)$, die aus einer beliebigen Function $\psi(u)$ entspringt, ableiten. Man kann immer eine von n abhängende positive Grösse v_n, welche bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird, so bestimmen, dass die Differenz

$$\chi(x; v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x$$

gegen Null convergirt, wenn n ohne Ende wächst, und dann ist

$$\chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x \tag{35.}$$

eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.

Selbstverständlich soll damit nicht gesagt sein, dass man auf diese Weise alle Functionen der in Rede stehenden Art erhalte.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die Gleichung (32.) für die zwischen $-c$ und c liegenden Werthe von x, wie leicht zu beweisen ist, auch dann noch besteht, wenn unter $f(x)$ eine Function verstanden wird, welche in dem Intervalle von $x = -c$ bis $x = c$ eindeutig definirt und stetig ist, ohne dass $f(c) = f(-c)$ zu sein braucht. Für $x = \pm c$ ist dann auf der Linken der Gleichung

$$\frac{1}{2}(f(-c) + f(c))$$

statt $f(\pm c)$ zu setzen.

2.

Die vorstehenden Sätze lassen sich nun zum Theil auch auf Functionen von mehreren reellen Veränderlichen ausdehnen.

Im Gebiete von n unbeschränkt veränderlichen reellen Grössen $x_1, \ldots x_n$ sei irgend ein n-fach ausgedehntes, unabgeschlossenes Continuum S gegeben.

Ferner sei $f(x_1, \dots x_n)$ eine beliebige, in dem Bereiche S überall eindeutig definirte, reelle und stetige Function, von der überdies angenommen wird, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze G habe. Endlich bedeute $\psi(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und continuirliche Function, welche der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt, für jeden von Null verschiedenen Werth von x positiv ist und ausserdem der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Werth hat, der mit ω bezeichnet werde.

Setzt man dann, unter $(x_1', \dots x_n')$ eine unbestimmte, dem Bereiche S angehörige Stelle und unter k eine von $x_1, \dots x_n$ und $x_1', \dots x_n'$ unabhängige positive Veränderliche verstehend,

$$(1.) \quad F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \cdots \int f(x_1', \dots x_n') \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n',$$

wo die Integration über den ganzen Bereich S zu erstrecken ist, so gelten die folgenden Sätze:

A. Für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ ist

$$\lim_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = f(x_1, \dots x_n).$$

B. Dagegen ist

$$\lim_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ weder dem Bereiche S noch dessen Begrenzung angehört.

Das Integral auf der Rechten der Gleichung (1.) hat unter den gemachten Voraussetzungen stets einen bestimmten endlichen Werth. Dies ist unmittelbar klar, wenn der Bereich S ganz im Endlichen liegt. Wenn das Letztere aber nicht der Fall ist, so sei S' irgend ein ganz im Endlichen liegender Theil von S; dann ist, da die Grössen

$$\psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right), \quad \cdots \quad \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right)$$

ihr Zeichen nicht ändern, das Integral

$$F' = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S')} \cdots \int f(x_1', \ldots x_n') \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und dem Integral

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S')} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n';$$

dieses aber ist kleiner als

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$
$$= \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u_1) \ldots \psi(u_n) du_1 \ldots du_n = 1.$$

Es ist also

$$|F'| < G,$$

wie man auch den Bereich S' annehmen möge. Dies genügt zu dem Beweise, dass auch in dem Falle, wo der Bereich S von unendlicher Ausdehnung ist, der Ausdruck $F(x_1, \ldots x_n; k)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \ldots x_n$ und jeden positiven Werth von k einen bestimmten endlichen Werth hat.

Man denke sich nun in S eine Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ fixirt und verstehe unter δ eine positive Grösse, die so klein anzunehmen ist, dass alle durch die folgenden Formeln:

$$x_1' = x_1 + u_1 \delta, \quad \ldots \quad x_n' = x_n + u_n \delta \qquad (-1 \leqq u_1 \leqq 1, \ldots -1 \leqq u_n < 1)$$

definirten Stellen $(x_1', \ldots x_n')$ in S liegen. Die Gesammtheit dieser Stellen werde mit S_1 bezeichnet und die Gesammtheit aller übrigen Stellen von S mit S_2. Dann hat man, wenn

$$F_1 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_1)} \cdots \int f(x_1', \ldots x_n') \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n',$$

$$F_2 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int f(x_1', \ldots x_n') \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

gesetzt wird,

$$F(x_1, \dots x_n; k) = F_1 + F_2.$$

Nun ist F_2 dem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n',$$

also

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \\ &= \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \right. \\ &\qquad \left. - \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} \cdots \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \right\} \\ &= \varepsilon G \left\{ 1 - \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \dots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n \right\}, \end{aligned}$$

wo ε eine Grösse bedeutet, die dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Ferner hat man

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \cdots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} f(x_1 + k u_1, \dots x_n + k u_n)\, \psi(u_1) \dots \psi(u_n)\, du_1 \dots du_n \\ &= \frac{1}{2^n \omega^n} f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \dots x_n + \varepsilon_n \delta) \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \dots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n \\ &= f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \dots x_n + \varepsilon_n \delta) \cdot \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \cdots \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ Grössen bedeuten, von denen jede zwischen -1 und $+1$ liegt. Setzt man nun

$$\frac{1}{\omega} \int_u^{+\infty} \psi(u)\, du = \chi(u),$$

so hat man nach dem Vorstehenden

$$F_2 = \varepsilon G\left\{1-\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n\right\},$$

$$F_1 = f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \dots x_n).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n + (f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n))\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \dots x_n)+\left[\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n-1\right]f(x_1, \dots x_n)$$

$$+ (f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n)).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n.$$

Jetzt nehme man für δ eine stetige Function von k an, die gleichzeitig mit k unendlich klein wird, jedoch so, dass dies auch noch für $\frac{k}{\delta}$ gilt, z. B. man setze $\delta = \sqrt{k}$, so ist

$$\lim_{k=0} F_2 = 0, \quad \lim_{k=0} F_1 = f(x_1, \dots x_n).$$

Denn es ist $\frac{d\chi(u)}{du} = -\frac{1}{\omega}\psi(u)$, es nimmt also $\chi(u)$ beständig ab, wenn u zunimmt, und es ist

$$\lim_{u=+\infty} \chi(u) = 0.$$

Ferner wird

$$f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n)$$

gleichzeitig mit δ unendlich klein. So ergiebt sich

$$\lim_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = f(x_1, \dots x_n)$$

für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz A. erwiesen; und zwar ergiebt sich zugleich, dass die Function $F(x_1, \dots x_n; k)$ sich für alle Werthsysteme $x_1, \dots x_n$, welche einem ganz im Endlichen liegenden, abgeschlossenen Theile des Bereiches S angehören, gleichmässig der Function $f(x_1, \dots x_n)$ nähert, wenn k gegen Null convergirt.

Um nun die Behauptung B. zu erhärten, nehme man die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ ausserhalb des Integrationsgebietes S an und wähle um $(x_1, \dots x_n)$ einen Bereich S_1 der Art, dass die in ihm liegenden Stellen $(x_1', \dots x_n')$ durch die Ungleichungen

$$x_\lambda - \delta \leqq x_\lambda' \leqq x_\lambda + \delta \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

definirt werden, und zwar so, dass alle diese Stellen noch ausserhalb des Gebietes S liegen, was sich durch passende Wahl von δ immer erreichen lässt.

Es ist

$$F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n'.$$

Bezeichnet nun S_2 den nach Ausschluss von S_1 von dem ganzen Gebiete Σ der Veränderlichen $(x_1', \dots x_n')$ übrig bleibenden Theil, so ist S ein Theil von S_2, also ist, wenn ε' eine Grösse bezeichnet, die absolut genommen kleiner ist als 1 und als ε,

$$F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{\varepsilon' G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_2)} \cdots \int \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n'$$

$$= \varepsilon' G \left\{1 - \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $\delta = \sqrt{k}$ nimmt,

$$\lim_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ ausserhalb des Gebietes S angenommen wird; zugleich erkennt man, dass die Annäherung an den Werth Null eine gleichmässige ist.

Für Punkte $(x_1, \dots x_n)$, welche auf der Grenze des Integrationsgebietes S liegen, lässt sich die Bestimmung des Grenzwerthes von $F(x_1, \dots x_n; k)$ für $k = 0$ nicht in voller Allgemeinheit durchführen.

Nimmt man nun innerhalb des Bereiches S, der sich auch in's Unendliche erstrecken kann, ein ganz im Endlichen liegendes, abgeschlossenes Continuum S' an, so lässt sich zeigen, dass es, wenn man $(x_1, \dots x_n)$ auf S' beschränkt, stets möglich ist, nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche innerhalb S' von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ um weniger als δ abweicht, dass also

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta$$

ist für alle in S' gelegenen Stellen $(x_1, \dots x_n)$.

Zunächst werde S in zwei Theile, S_1 und S_2, zerlegt, von denen der erstere die Gesammtheit aller Stellen $(x_1, \dots x_n)$ von S enthält, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkt (d. h. der Stelle $x_1 = 0, \dots x_n = 0$) um weniger als R entfernt sind, während S_2 den übrigen Theil von S enthalten möge. Offenbar

kann durch passende Wahl von R immer erreicht werden, dass S_1 den Bereich S' ganz in sich enthält. Dieser Theilung entsprechend zerlegt sich dann $F(k)$ in zwei Theile $F_1(k)$ und $F_2(k)$, von denen der letztere gleichmässig gegen Null convergirt, wenn k sich dieser Grenze nähert, weil alle Punkte von S_2 ausserhalb S' liegen. Dagegen convergirt für alle Punkte in S_1, also auch in S', $F_1(k)$ gleichmässig gegen $f(x_1, \dots x_n)$; d. h. nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_1 ist es möglich, für k eine obere Grenze k' so festzustellen, dass für alle Werthe von k, welche kleiner als k' sind,

$$|F_1(k) - f(x_1, \dots x_n)| < \delta_1$$

ist, wenn $(x_1, \dots x_n)$ irgendwo in S' liegt.

Nimmt man nun an, dass $\psi(x)$ eine ganze transcendente Function ist, z. B. $\psi(x) = e^{-x^2}$, so können die Grössen $\psi\left(\frac{x_\lambda' - x_\lambda}{k}\right)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, \dots x_n$ entwickelt werden, da die x_λ' sowohl als auch die x_λ auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, nämlich die ersteren auf S_1, die letzteren auf S'. Das Product der n Functionen ψ ist also ebenfalls in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ zu entwickeln, welche, da sie gleichmässig convergirt, gliedweise integrirt werden kann; es ergiebt sich also auch für $F_1(k)$ eine beständig convergente Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$. Man kann also nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_2 eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ derart von $F_1(k)$ abtrennen, dass

$$|F_1(k) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta_2$$

ist. Combinirt man diese Ungleichung mit der vorhergehenden und wählt δ_1, δ_2 so, dass ihre Summe gleich der vorgeschriebenen Grösse δ ist, so erhält man

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta,$$

wie verlangt wurde.

Es war bisher von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ angenommen worden, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze besitze. Diese Annahme kann man aber fallen lassen, wenn es sich nur darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche sich in einem gegebenen endlichen Bereiche S', der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, der Function $f(x_1, \dots x_n)$ so genau anschliesst, dass der absolute

Betrag der Differenz $f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)$ für jede dem Bereiche S' angehörende Stelle $(x_1, \dots x_n)$ unter einer beliebig festgesetzten Grenze δ liegt.

Man kann nämlich offenbar innerhalb S einen ganz im Endlichen gelegenen Bereich S_1 annehmen, für welchen die Bedingung, dass für alle Stellen desselben $|f(x_1, \dots x_n)|$ unterhalb einer bestimmten Grenze liegt, erfüllt ist, und man kann diesen Bereich S_1 so wählen, dass er den gegebenen Bereich S' ganz umschliesst. Zu dem Zwecke nehme man um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Begrenzung von S eine Umgebung derartig an, dass kein Punkt irgend einer solchen Umgebung in S' liegt, und schliesse alle Punkte dieser Umgebungen aus sowie alle Punkte, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkte um weiter als R entfernt sind. Durch passende Wahl der Grösse R und der Radien der genannten Umgebungen kann man es dann stets erreichen, dass das entstehende Continuum S_1 allen angegebenen Bedingungen genügt. Ersetzt man dann S durch S_1, so findet man durch Anwendung des obigen Satzes die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung bestätigt.

Nach diesen Vorbereitungen ist man nunmehr im Stande, den Hauptsatz zu beweisen, dass nämlich die Function $f(x_1, \dots x_n)$ darstellbar ist in Form einer beständig convergenten Reihe, deren einzelne Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind.

Zu dem Zwecke denke man sich um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Grenze von S eine Kugel mit dem Radius ϱ_1 und ferner um den Nullpunkt eine Kugel mit dem Radius R_1 beschrieben. Schliesst man dann alle Punkte aus, welche innerhalb der ersten Kugeln und ausserhalb der letzten Kugel liegen, so bleibt bei geeigneter Wahl der Radien ϱ_1 und R_1 von S noch ein Continuum übrig, welches mit S_1 bezeichnet werde. Ferner seien $\varrho_2, \varrho_3, \dots$ und $R_2, R_3, \dots$ Grössen, welche die Bedingungen

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots, \quad \lim_{m=\infty} \varrho_m = 0,$$
$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots, \quad \lim_{m=\infty} R_m = \infty$$

befriedigen, und $S_2, S_3, \dots$ diejenigen Bereiche, welche aus S genau so entstehen wie S_1, wenn man ϱ_1, R_1 durch ϱ_2, R_2; ϱ_3, R_3; $\dots$ ersetzt. Wenn alsdann ein bestimmter Punkt $P = (x_1, \dots x_n)$ gegeben ist, so giebt es offenbar stets eine Zahl r von der Beschaffenheit, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$ den Punkt P enthalten.

Ferner nehme man eine unendliche Reihe beliebig kleiner positiver Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ derart an, dass $\lim_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist und ausserdem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m$$

einen endlichen bestimmten Werth hat.

Nun kann man den verschiedenen Bereichen S_ν entsprechend eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x_1, \ldots x_n),\ G_2(x_1, \ldots x_n),\ G_3(x_1, \ldots x_n),\ \ldots$$

derart herstellen, dass

$$|f(x_1, \ldots x_n) - G_\nu(x_1, \ldots x_n)| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

ist, wenn die Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ dem Bereich S_ν angehört. Bildet man alsdann die Grössen

$$\begin{aligned}
f_0(x_1, \ldots x_n) &= G_1(x_1, \ldots x_n) \\
f_1(x_1, \ldots x_n) &= G_2(x_1, \ldots x_n) - G_1(x_1, \ldots x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_m(x_1, \ldots x_n) &= G_{m+1}(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

so sind auch $f_0, f_1, \ldots$ ganze rationale Functionen, und es ist

$$\sum_{\mu=0}^{m} f_\mu(x_1, \ldots x_n) = G_{m+1}(x_1, \ldots x_n).$$

Wählt man nun m hinreichend gross, so wird der Bereich S_m sowie alle folgenden Bereiche den Punkt $(x_1, \ldots x_n)$ enthalten, und daher ist

$$\begin{aligned}
|f(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n)| &< \delta_m, \\
|f(x_1, \ldots x_n) - G_{m+1}(x_1, \ldots x_n)| &< \delta_{m+1},
\end{aligned}$$

also

$$|G_{m+1}(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1}$$

oder

$$|f_m(x_1, \ldots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1},$$

sobald m grösser ist als eine bestimmte Zahl r. Daraus folgt also

$$\sum_{\mu=r+1}^{\infty} |f_u| < \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_\mu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_{\mu+1}.$$

Der Betrag der rechten Seite dieser Ungleichung hat nun aber wegen der Convergenz der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m$ einen endlichen Werth; es ist also die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \ldots x_n)$$

unbedingt convergent für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \ldots x_n)$.

Nunmehr kann auch der Werth dieser Reihe bestimmt werden; es ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu = \operatorname{Lim}_{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu = \operatorname{Lim}_{m=\infty} G_{m+1} = f(x_1, \ldots x_n),$$

da der Annahme gemäss $\operatorname{Lim}_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist. Es ist also die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ als eine für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \ldots x_n)$ unbedingt convergente Reihe von ganzen rationalen Functionen $f_\mu(x_1, \ldots x_n)$ dargestellt.

Ist nun ein ganz im Endlichen liegender Bereich S' gegeben, der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, so kann r so gewählt werden, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \ldots$ den Bereich S' ganz umschliessen; dann werden also die obigen Ungleichungen für alle dem Bereich S' angehörigen Werthsysteme $(x_1, \ldots x_n)$ gelten, d. h. die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \ldots x_n)$$

ist innerhalb des Bereiches S' auch gleichmässig convergent. Es gilt also das Theorem:

Jede Function $f(x_1, \ldots x_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise in der Form einer unendlichen Reihe darstellen, deren Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jedes endliche, in dem Bereiche S gelegene Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$ und gleichmässig für jeden ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Theil von S.

Hieran knüpfe ich noch einige Bemerkungen, die den oben in Beziehung auf Functionen von einer Veränderlichen gemachten ganz analog sind.

Man kann es so einrichten, dass die Coefficienten der Functionen $f_\mu(x_1, \ldots x_n)$ rationale Zahlen werden; ferner braucht man wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihen jedes Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$, für das der zugehörige Functionswerth berechnet werden soll, nicht absolut genau, sondern

nur mit einer gewissen, in jedem besonderen Falle zu bestimmenden Sicherheit zu kennen, um den gesuchten Functionswerth mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit zu berechnen, und zwar wird sich derselbe, da man zu dem Zwecke nur eine endliche Anzahl von Gliedern zu summiren hat, stets als eine rationale Zahl ergeben.

Doch ist dies theoretisch von geringerer Wichtigkeit; die Hauptsache liegt in der gewonnenen Erkenntniss, dass für jede Function von der angenommenen Beschaffenheit stets eine arithmetische Darstellung existirt, und zwar in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder sämmtlich ganze rationale Functionen der Argumente der Function sind, wenn auch durch das Bisherige freilich noch nicht festgestellt ist, wie man die Entwickelung der Function in eine solche unendliche Reihe wirklich herstellen könne.

Wird ferner angenommen, dass der Bereich S, innerhalb dessen die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ definirt ist, nur eine singuläre Stelle, die dann auch im Unendlichen liegen kann, enthalte, so kann man an die Stelle der Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ n andere $x'_1, \ldots x'_n$ so einführen, dass die letzteren rationale Functionen der ursprünglichen, und umgekehrt diese rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ werden, und zugleich die Function, in welche $f(x_1, \ldots x_n)$ durch diese Substitution übergeht, nur eine und zwar im Unendlichen liegende singuläre Stelle besitzt.

Nach dem vorhergehenden Satze kann demnach $f(x_1, \ldots x_n)$ in eine Reihe, in welcher jedes einzelne Glied eine ganze rationale Function von $x'_1, \ldots x'_n$, also eine rationale Function von $x_1, \ldots x_n$ ist, verwandelt werden.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun leicht zusammengesetztere zur Darstellung von Functionen der betrachteten Art geeignete Reihen bilden; worauf ich jedoch hier nicht näher eingehe.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE FLÄCHEN, DEREN MITTLERE KRÜMMUNG ÜBERALL GLEICH NULL IST.

(Umarbeitung einer am 25. Juni 1866 in der Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung.)

. . . Ich habe mich mit der Theorie dieser Flächen, der sogenannten Minimalflächen, besonders aus dem Grunde eingehender beschäftigt, weil sie, wie ich zeigen werde, auf das Innigste mit der Theorie der analytischen Functionen eines complexen Arguments zusammenhängt, so dass jede solche Function eine Fläche der in Rede stehenden Art bestimmt, und umgekehrt.

Die hauptsächlichsten Resultate meiner Untersuchungen erlaube ich mir der Akademie mit dem Bemerken vorzulegen, dass ich einen Theil davon, namentlich die Schlussformeln des § 1 und den Inhalt des § 4 bereits im Jahre 1861 im mathematischen Seminar der Universität vorgetragen habe.

1.

Ich betrachte von einer solchen Fläche zunächst nur ein ganz im Endlichen liegendes, von einer geschlossenen Linie begrenztes und von singulären Stellen freies Stück (M).

Ist dann (E) irgend eine einfach begrenzte ebene Fläche, so lassen sich bekanntlich die Punkte von (M) und (E) so paaren, dass jedem unendlich kleinen Elemente der einen Fläche ein ihm ähnliches der anderen entspricht. Versteht man nun unter x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes von (M) und unter p, q die des entsprechenden Punktes von (E) — wo dann die ersteren auf ein beliebiges orthogonales Axensystem im Raume, die anderen auf ein in der Ebene von (E) enthaltenes zu beziehen sind —, so werden

x, y, z stetige Functionen von p, q; ich nehme überdies an, dass dies auch von ihren Derivirten erster und zweiter Ordnung

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$$

gelte.

Dann bestehen die Gleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2,$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

und man hat, wenn

$$\text{(3.)} \qquad k = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2$$

gesetzt und die mittlere Krümmung der Fläche in dem Punkte (x, y, z) mit K bezeichnet wird,

$$\text{(4.)} \qquad K = \frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (1.), (2.) erhält man aber unter Beachtung des Umstandes, dass bei der angenommenen Beschaffenheit von M die drei Determinanten

$$\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}$$

an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden,

$$\text{(5.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right) : \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\right) : \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\right) : \left(\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\right), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(6.)} \qquad k^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2.$$

Wenn daher die mittlere Krümmung des betrachteten Flächenstücks (M) überall gleich Null ist, so müssen in allen Punkten desselben die Gleichungen

$$(7.) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = 0$$

bestehen. Daraus ergeben sich, wenn man $p + qi = u$ setzt und den reellen Theil einer complexen Grösse durch den vorgesetzten Buchstaben $\Re$ bezeichnet, für x, y, z die Ausdrücke

$$(8.) \qquad x = \Re f(u), \quad y = \Re g(u), \quad z = \Re h(u),$$

wo f, g, h Functionen von u sind, die im Bereiche (M) den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen und deren Ableitungen durch die Gleichung

$$(9.) \qquad (f'(u))^2 + (g'(u))^2 + (h'(u))^2 = 0$$

verbunden sind. Zugleich lässt sich zeigen, dass durch die Gleichungen (8.), wenn die in ihnen vorkommenden Functionen f, g, h die angegebene Beschaffenheit haben, stets eine Fläche der in Rede stehenden Art dargestellt wird.

Die Gleichung (9.) wird befriedigt, wenn man, unter G, H willkürliche Functionen von u verstehend,

$$(10.) \qquad f'(u) = G^2 - H^2,$$

$$(11.) \qquad g'(u) = i(G^2 + H^2),$$

$$(12.) \qquad h'(u) = 2GH$$

setzt. Zur Erfüllung aller Bedingungen, denen f, g, h genügen müssen, ist es aber nothwendig, dass überall, wo die letzteren den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, G, H dieselbe Beschaffenheit haben. Aus der Gleichung

$$(13.) \qquad (\tfrac{1}{2}f' - \tfrac{1}{2}ig')(-\tfrac{1}{2}f' - \tfrac{1}{2}ig') = \tfrac{1}{4}h'^2$$

ist nämlich ersichtlich, dass an einer bestimmten Stelle (a), für welche die Functionen f, g, h den angegebenen Bedingungen genügen, von den beiden Factoren auf der linken Seite nur dann einer verschwindet, wenn dort h' gleich Null ist, und zwar nur dieser eine, weshalb seine Entwickelung nach Potenzen von $(u-a)$ mit einer graden Potenz dieser Grösse anfangen muss. Dies ist aber nur möglich, wenn G, H Functionen von dem angegebenen Charakter sind, welche an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden.

Hiernach kann man, wenn man mit u^0 irgend einen bestimmten Werth von u, und mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des zugehörigen Punktes von (M) bezeichnet, die Gleichungen (8.) in folgender Gestalt darstellen:

$$(14.)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \Re\int_{u^0} (G^2(u) - H^2(u))\,du \\ y &= y_0 + \Re\int_{u^0} i(G^2(u) + H^2(u))\,du \\ z &= z_0 + \Re\int_{u^0} 2G(u)\,H(u)\,du, \end{aligned}\right.$$

oder auch, wenn unter u_1, u_1^0, G_1, H_1 die zu u, u^0, G, H conjugirten complexen Grössen verstanden werden,

$$(15.)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2}\int_{u^0} (G^2 - H^2)\,du + \frac{1}{2}\int_{u_1^0} (G_1^2 - H_1^2)\,du_1 \\ y &= y_0 + \frac{1}{2}\int_{u^0} i(G^2 + H^2)\,du - \frac{1}{2}\int_{u_1^0} i(G_1^2 + H_1^2)\,du_1 \\ z &= z_0 + \int_{u^0} GH\,du + \int_{u_1^0} G_1 H_1\,du_1. \end{aligned}\right.$$

Wenn die willkürlich anzunehmende Figur (E) ein um den Nullpunkt der Coordinaten p, q mit dem Radius 1 beschriebener Kreis ist, so lassen sich die Functionen f, g, h, G, H durch convergente Reihen, die nur ganze positive Potenzen von u enthalten, darstellen. Man hat also den Satz:

»Es lassen sich die Coordinaten eines Punktes einer Fläche (M) auch mittels convergenter Reihen von der Form

$$(16.)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sum_\lambda \left\{\frac{A_\lambda + iA'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{A_\lambda - iA'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda\right\} \\ y &= \sum_\lambda \left\{\frac{B_\lambda + iB'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{B_\lambda - iB'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda\right\} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \infty) \\ z &= \sum_\lambda \left\{\frac{C_\lambda + iC'_\lambda}{2}(p+qi)^\lambda + \frac{C_\lambda - iC'_\lambda}{2}(p-qi)^\lambda\right\} \end{aligned}\right.$$

durch zwei reelle Veränderliche p, q ausdrücken, in der Art dass A_λ, B_λ, C_λ, A'_λ, B'_λ, C'_λ sämmtlich reelle Grössen sind, und man alle Punkte der Fläche erhält, wenn man für p, q die Coordinaten aller Punkte setzt, die im Innern des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen.«

An Stelle von u werde eine andere Veränderliche s mittels der Gleichung

$$s = \frac{H(u)}{G(u)} = \frac{f' + ig'}{-h'} \tag{17.}$$

eingeführt, wo dann in Folge der Gleichung (13.)

$$\frac{1}{s} = \frac{f' - ig'}{h'} \tag{18.}$$

wird. Nöthigenfalls werde der Bereich (E) so beschränkt, dass in seinem Innern nicht nur s eine eindeutige Function von u, sondern auch u eine eindeutige Function von s ist. Dann ist auch die Function

$$G^2(u)\frac{du}{ds} = \frac{1}{2}(f' - ig')\frac{du}{ds} = \mathfrak{F}(s), \tag{19.}$$

welche zur Abkürzung im Folgenden auch mit S bezeichnet werden soll, eine eindeutige Function ihres Argumentes. Aus den Gleichungen (8.) erhält man dann die folgenden:

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \Re\,(1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = \frac{1-s^2}{2}S\,ds + \frac{1-s_1^2}{2}S_1\,ds_1 \\ dy &= \Re\, i(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds = i\frac{1+s^2}{2}S\,ds - i\frac{1+s_1^2}{2}S_1\,ds_1 \\ dz &= \Re\, 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds \qquad\quad = sS\,ds + s_1S_1\,ds_1, \end{aligned}\right. \tag{20.}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+ss_1)^2 SS_1\,ds\,ds_1, \tag{21.}$$

wenn man die zu s, S conjugirten Grössen beziehlich durch s_1, S_1 bezeichnet.

Es ist nun zunächst die geometrische Bedeutung der Grössen s und s_1, S und S_1 festzustellen. Um den Nullpunkt der Coordinaten sei mit dem Radius 1 eine Kugel beschrieben, die von der positiven Richtung der z-Axe im Punkte Z geschnitten werden möge. Dann lässt sich der Ort eines beliebigen Punktes P der Kugelfläche, dessen Coordinaten in Bezug auf das gewählte Axensystem ξ, η, ζ sein mögen, durch eine complexe Grösse $p+qi$ (wobei jetzt p, q andere Grössen als oben bezeichnen) folgendermassen bestimmen. Man projicire den Punkt P von Z aus auf die (x,y)-Ebene; dann sind p, q, 0 die Coordinaten der Projection, und man hat für $s = p+qi$, $s_1 = p-qi$

$$s = \frac{\xi + \eta i}{1-\zeta}, \quad s_1 = \frac{\xi - \eta i}{1-\zeta}, \tag{22.}$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$

$$\xi = \frac{s_1+s}{ss_1+1}, \quad \eta = \frac{i(s_1-s)}{ss_1+1}, \quad \zeta = \frac{ss_1-1}{ss_1+1} \tag{23.}$$

ergiebt. Hiernach entspricht, wenn s eine beliebige complexe Grösse bedeutet, jedem Werthe derselben ein bestimmter Punkt der Kugelfläche, sowie umgekehrt jedem Punkte der letzteren ein bestimmter Werth von s. Wird im Besonderen unter s die durch die Gleichung (17.) definirte Grösse verstanden, so sind das Flächenstück (M) und ein bestimmter Bereich der Kugelfläche durch parallele Normalen auf einander bezogen. Infolge der bezüglich des Bereiches (E) gemachten Annahme sind im Innern von (M) keine zwei Normalen einander gleichgerichtet.

Aus den Gleichungen (20.) und (23.) ergiebt sich die Formel

$$\xi d^2x+\eta d^2y+\zeta d^2z = -(Sds^2+S_1ds_1^2), \tag{24.}$$

aus welcher mittels der Gleichung (21.)

$$-\frac{\xi d^2x+\eta d^2y+\zeta d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{Sds^2+S_1ds_1^2}{(1+ss_1)^2\sqrt{SS_1}\,ds\,ds_1} = \varrho \tag{25.}$$

folgt. Die Formel auf der Linken dieser Gleichung ist bekanntlich der Ausdruck für die Krümmung ϱ, welche der durch die beiden einander unendlich nahen Punkte (x, y, z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$ gehende Normalschnitt der Fläche in dem ersteren Punkte besitzt.

Fixirt man nun den Werth von $\sqrt{S}$ und versteht unter $\sqrt{S_1}$ die zu demselben conjugirte Grösse, so kann man, unter σ eine unendlich kleine positive, unter τ aber eine beliebige reelle Grösse verstehend

$$\sqrt{S}ds = \sigma e^{\tau i}, \quad \sqrt{S_1}ds_1 = \sigma e^{-\tau i} \tag{26.}$$

setzen und erhält so für die Krümmung den folgenden Ausdruck

$$\varrho = \frac{2\cos(2\tau)}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}, \tag{27.}$$

dessen Werth sich nicht ändert, wenn man $-\sqrt{S}$ statt $\sqrt{S}$ nimmt. Hiernach ist die Grösse ϱ beständig in dem Intervalle

$$\left(\frac{2}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}} \cdots \frac{-2}{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}\right)$$

enthalten und geht, wenn τ stetig wachsend die Strecke $\left(0 \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ durchläuft, beständig abnehmend von ihrer oberen Grenze zu der unteren über.

Betrachtet man nun die beiden durch den Punkt (x, y, z) gelegten Hauptnormalschnitte der Fläche, welche also dem grössten und kleinsten Werthe der Krümmung entsprechen, so lassen sich die Richtungscosinus der in diesen Hauptnormalschnitten gelegenen Tangenten der Fläche leicht angeben. Führt man nämlich die in (26.) definirten Grössen in die Gleichungen (20.) und (21.) ein, so nehmen dieselben folgende Gestalt an:

$$(28.)\quad \begin{cases} dx = \frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i} + \frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i} \\ dy = i\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i} - i\frac{1+s_1^2}{2}\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i} \\ dz = s\sqrt{S}.\sigma e^{\tau i} + s_1\sqrt{S_1}.\sigma e^{-\tau i} \\ dx^2+dy^2+dz^2 = (1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}.\sigma^2. \end{cases}$$

Das Maximum der Krümmung entspricht dem Werthe $\tau = 0$, das Minimum derselben dem Werthe $\tau = \frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man die Richtungscosinus der zugehörigen Tangenten mit ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2, so ergeben sich für diese Grössen die Werthe:

$$(29.)\quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}+\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \xi_2 = i\frac{\frac{1-s^2}{2}\sqrt{S}-\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}} \\ \eta_1 = i\frac{\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}-\frac{1+s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \eta_2 = -\frac{\frac{1+s^2}{2}\sqrt{S}+\frac{1-s_1^2}{2}\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}} \\ \zeta_1 = \frac{s\sqrt{S}+s_1\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}, & \zeta_2 = i\frac{s\sqrt{S}-s_1\sqrt{S_1}}{(1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1}}. \end{cases}$$

Der gemeinsame Nenner dieser Ausdrücke hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man nämlich den Krümmungsradius der Fläche in dem betrachteten Punkte mit r, setzt also

$$(30.)\qquad r = \frac{1}{\varrho} = \frac{(1+ss_1)^2\sqrt{S}\sqrt{S_1}}{2},$$

so wird

$$(31.) \qquad (1+ss_1)\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{S_1} = \sqrt{2r}.$$

Bildet man nun die Ausdrückę:

$$(32.) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{2r}(\xi_1 - i\xi_2) &=& (1-s^2)\sqrt{S} \\ \sqrt{2r}(\eta_1 - i\eta_2) &=& i(1+s^2)\sqrt{S} \\ \sqrt{2r}(\zeta_1 - i\zeta_2) &=& 2s\sqrt{S}, \end{array} \right.$$

so ist ersichtlich, dass dieselben nur von s und $\sqrt{S}$ abhängen, also analytische Functionen von s sind.

Aus den vorstehenden Ergebnissen lässt sich nun eine wichtige Folgerung ziehen.

Es bedeute $F(s)$ eine Function von s, deren dritte Derivirte S ist; dann hat man

$$(33.) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-s^2)F(s)ds &=& \dfrac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} + 2s\dfrac{dF(s)}{ds} - 2F(s)\right\} \\ (1+s^2)\dfrac{dF(s)}{ds} &=& \dfrac{d}{ds}\left\{(1+s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2s\dfrac{dF(s)}{ds} + 2F(s)\right\} \\ 2sF(s)ds &=& \dfrac{d}{ds}\left\{2s\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2\dfrac{dF(s)}{ds}\right\} \end{array} \right.$$

und somit, wenn man festsetzt, dass für $s = 0$

$$(34.) \qquad \frac{d^2F(s)}{ds^2} = 0, \quad 2\frac{dF(s)}{ds} = -z_0, \quad 2s\frac{dF(s)}{ds} - 2F(s) = -(x_0 + y_0 i)$$

sein solle,

$$(35.) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \Re\left\{(1-s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} + 2s\dfrac{dF(s)}{ds} - 2F(s)\right\} \\ y &=& \Re\left\{i(1+s^2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2is\dfrac{dF(s)}{ds} + 2iF(s)\right\} \\ z &=& \Re\left\{2s\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2\dfrac{dF(s)}{ds}\right\}. \end{array} \right.$$

Die Function $F(s)$ ist zunächst nur für solche Werthe von s definirt, für welche $|s-s_0|$ unter einer gewissen Grenze liegt. Nach den Principien der Functionenlehre ist sie aber ein »Element« einer bestimmten monogenen analytischen Function von s, und es bleiben daher, wenn man fortan unter $F(s)$ diese Function versteht, für sie die im Vorstehenden erhaltenen Resultate

ohne Ausnahme gültig, so dass durch das System der Gleichungen (35.) stets eine Minimalfläche in ihrer ganzen Ausdehnung dargestellt wird.

Damit ist gerechtfertigt, was in der Einleitung gesagt wurde, nämlich dass zu jeder monogenen analytischen Function eine bestimmte Fläche, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, gehöre, so wie auch umgekehrt.

2.

Wenn man Gewicht darauf legt, für alle drei in den Gleichungen (35.) vorkommenden Grössen x, y, z Ausdrücke von derselben äusseren Gestalt zu haben, so kann dies ohne Weiteres durch eine Coordinatentransformation erreicht werden.

Es seien (x_1, y_1, z_1) und (ξ_1, η_1, ζ_1) die Coordinaten der Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) in Beziehung auf ein zweites orthogonales Axensystem mit demselben Nullpunkt wie das ursprüngliche, so verstehe man jetzt unter s die Grösse

$$\frac{\xi_1 + \eta_1 i}{1 - \zeta_1}$$

und drücke x_1, y_1, z_1 als Functionen derselben in der angegebenen Form aus. Mittelst der unter x, y, z und x_1, y_1, z_1 bestehenden Gleichungen

$$(36.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\ y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\ z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1, \end{array} \right.$$

in denen sich die Constanten $\alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ auf die bekannte Weise durch drei von einander unabhängige Grössen rational ausdrücken lassen, erhält man dann die folgenden Formeln, in denen

$$(37.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (s,1) = \alpha + \alpha' i + 2\alpha'' s - (\alpha - \alpha' i) s^2 \\ (s,2) = \beta + \beta' i + 2\beta'' s - (\beta - \beta' i) s^2 \\ (s,3) = \gamma + \gamma' i + 2\gamma'' s - (\gamma - \gamma' i) s^2 \end{array} \right.$$

gesetzt ist:

$$(38.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \Re\left\{(s,1)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,1)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,1)}{ds^2}F(s)\right\} \\ y = \Re\left\{(s,2)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,2)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,2)}{ds^2}F(s)\right\} \\ z = \Re\left\{(s,3)\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - \dfrac{d(s,3)}{ds}\dfrac{dF(s)}{ds} + \dfrac{d^2(s,3)}{ds^2}F(s)\right\}. \end{array} \right.$$

3.

Die durch die Gleichungen (35.) oder (38.) dargestellte Fläche ist eine algebraische, wenn $F(s)$ eine algebraische Function von s ist. Dies gilt aber auch umgekehrt.

Zum Beweise schicke ich folgenden Hülfssatz voraus:

Es sei $p+qi$ eine complexe Grösse, deren geometrischer Ort, wie oben, eine einfach begrenzte ebene Figur E ist, $\Phi(p+qi)$ eine eindeutig definirte und continuirliche Function derselben, und $\Psi(p,q)$ der reelle Theil von $\Phi(p+qi)$. Wenn nun in einem bestimmten Falle zwischen $\Psi(p,q)$ und p, q eine algebraische Gleichung besteht, so muss auch $\Phi(p+qi)$ mit $p+qi$ durch eine solche verbunden sein.

Beschränkt man die Veränderlichkeit des Punktes $p+qi$ zunächst auf einen ganz im Innern von E gelegenen Kreis, dessen Mittelpunkt $p_0+q_0 i = u_0$ sein möge, und setzt

$$p-p_0 = \alpha, \quad q-q_0 = \beta, \tag{39.}$$

so lässt sich $\Phi(p+qi)$ durch eine Reihe

$$a_0+b_0 i+(a_1+b_1 i)(\alpha+\beta i)+(a_2+b_2 i)(\alpha+\beta i)^2+\cdots \tag{40.}$$

darstellen, in der $a_0, a_1, \ldots b_0, b_1, \ldots$ reelle Constanten sind; und es ist

$$\Psi(p,q) = a_0+\frac{1}{2}(a_1+b_1 i)(\alpha+\beta i)+\cdots+\frac{1}{2}(a_1-b_1 i)(\alpha-\beta i)+\cdots. \tag{41.}$$

Der Voraussetzung nach besteht nun eine Gleichung

$$G(\Psi, p, q) = 0, \tag{42.}$$

in welcher der Ausdruck auf der Linken eine ganze rationale Function von Ψ, p, q ist. Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von α, β, so müssen die Coefficienten der einzelnen Glieder sämmtlich gleich Null werden; die Gleichung besteht also auch noch, wenn man an die Stelle von α, β beliebige complexe Grössen v, w treten lässt, vorausgesetzt, dass die Entwickelung von Ψ nach dieser Substitution convergent bleibe. Da das Letztere sicher der Fall ist, wenn die absoluten Beträge von v, w beide kleiner als der halbe Radius des angenommenen Kreises sind, so kann man, mit u einen beliebigen

Punkt im Innern dieses Kreises bezeichnend,

$$v = \frac{u-u_0}{2}, \quad w = \frac{u-u_0}{2i} \tag{43.}$$

nehmen, wodurch

$$\Psi = a_0 + \frac{1}{2}\Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi(u_0) \tag{44.}$$

wird und die Gleichung

$$G(\Psi, p_0+v, q_0+w) = 0$$

die Form

$$\mathfrak{G}(\Phi(u), u) = 0 \tag{45.}$$

erhält, wo $\mathfrak{G}$ eine ganze Function von $\Phi(u)$ und u ist. Die Gültigkeit dieser Gleichung für alle Punkte im Innern von E steht aber fest, sobald bewiesen ist, dass sie für alle Punkte innerhalb eines noch so kleinen Theiles dieser Figur gilt.

Dieses vorausgesetzt, nehme man an, dass die durch die Gleichungen (35.) dargestellte Fläche eine algebraische sei. Dann besteht, wenn man

$$\frac{\xi}{1-\zeta} = p, \quad \frac{\eta}{1-\zeta} = q \tag{46.}$$

setzt, zwischen diesen beiden Grössen und jeder der Coordinaten x, y, z eine algebraische Gleichung. Versteht man daher unter $F(s)$ zunächst die eindeutige Function von s, welche bei der obigen Herleitung der Gleichungen (35.) definirt worden ist, so entspricht von den Functionen

$$\left\{\begin{array}{l} (1-s^2)\,\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} + 2s\,\dfrac{dF(s)}{ds} - 2\,F(s) \\ (1+s^2)i\,\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2si\,\dfrac{dF(s)}{ds} + 2iF(s) \\ 2s\,\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} - 2\,\dfrac{dF(s)}{ds} \end{array}\right. \tag{47.}$$

jede einzelne den Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes und ist demnach mit s durch eine algebraische Gleichung verbunden. Aus den vorstehenden Ausdrücken erhält man aber $F(s)$, wenn man sie der Reihe nach mit

$$\frac{1}{4}(s^2-1), \quad -\frac{1}{4}(s^2+1)i, \quad -\frac{1}{2}s$$

multiplicirt und dann addirt; es besteht daher auch zwischen s und dem betrachteten Zweige von $F(s)$ eine solche Gleichung. Dies reicht aber hin, um festzustellen, dass die Function $F(s)$ in ihrem ganzen Umfange eine algebraische ist. Dasselbe gilt natürlich auch von der in den Gleichungen (38.) vorkommenden Function.

Hiernach hat man den Satz:

»Alle algebraischen Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, werden durch die Gleichungen (35.) oder (38.) dargestellt, wenn man unter $F(s)$ eine willkürliche algebraische Function von s versteht.«

4.

Man kann aus den Formeln (38.) noch leicht die Gleichung der Fläche in Ebenen-Coordinaten ableiten.

Es seien x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der Ebene, welche die Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührt, und

$$ux' + vy' + wz' = t \tag{48.}$$

die Gleichung dieser Ebene.*) Dann ist

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \eta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \zeta = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \tag{49.}$$

und

$$s = \frac{\xi_1 + \eta_1 i}{1-\zeta_1} = \frac{U+Vi}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}-W}, \tag{50.}$$

wo

$$\left\{\begin{array}{l} U = \alpha u + \beta v + \gamma w \\ V = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w \\ W = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w \\ u^2+v^2+w^2 = U^2+V^2+W^2. \end{array}\right. \tag{51.}$$

Daraus folgt

$$s^2(U-Vi) - 2Ws - U - Vi = 0, \tag{52.}$$

*) Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dass u, v, w jetzt andere Grössen bedeuten als die vorhin so bezeichneten.

und hieraus

$$(53.)\quad ds = \frac{(1-s^2)dU+i(1+s^2)dV+2sdW}{2\sqrt{U^2+V^2+W^2}} = \frac{(s,1)du+(s,2)dv+(s,3)dw}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Ferner ist

$$(54.)\quad u\frac{\partial s}{\partial u}+v\frac{\partial s}{\partial v}+w\frac{\partial s}{\partial w} = 0,$$

also

$$(55.)\quad u(s,1)+v(s,2)+w(s,3) = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man nach s differentiirt,

$$(56.)\quad u\frac{d(s,1)}{ds}+v\frac{d(s,2)}{ds}+w\frac{d(s,3)}{ds} = -2\sqrt{u^2+v^2+w^2},$$

und aus den obigen Ausdrücken von $(s,1)$ u. s. w.

$$(57.)\quad u\frac{d^2(s,1)}{ds^2}+v\frac{d^2(s,2)}{ds^2}+w\frac{d^2(s,3)}{ds^2} = -2(U-Vi).$$

Da nun

$$(58.)\quad t = ux+vy+wz$$

ist, so geben die Gleichungen (38.):

$$(59.)\quad t = \Re\left[2\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,\frac{dF(s)}{ds}-2(U-Vi)F(s)\right].$$

Es ist aber

$$(60.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{dF}{ds}\dfrac{(s,1)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{dF}{ds}\dfrac{(s,2)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \dfrac{dF}{ds}\dfrac{(s,3)}{2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \end{cases}$$

$$(61.)\quad (\alpha-\alpha'i)(s,1)+(\beta-\beta'i)(s,2)+(\gamma-\gamma'i)(s,3) = 2,$$

und daher

$$(62.)\quad \frac{dF(s)}{ds} = \left((\alpha-\alpha'i)\frac{\partial F(s)}{\partial u}+(\beta-\beta'i)\frac{\partial F(s)}{\partial v}+(\gamma-\gamma'i)\frac{\partial F(s)}{\partial w}\right)\sqrt{u^2+v^2+w^2}.$$

Bringt man also

$$F\left(\frac{U+Vi}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}-W}\right)$$

auf die Form

$$F^{(1)} + F^{(2)} i$$

in der Art, dass $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ reelle Functionen von U, V, W sind, so erhält man

$$t = 2(U^2+V^2+W^2)\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial U} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial V}\right) - 2UF^{(1)} - 2VF^{(2)} \tag{63.}$$

als die Gleichung der Fläche in Ebenen-Coordinaten.

Betrachtet man t als Function von u, v, w, so hat man für die Coordinaten des Punktes, in welchem eine dieser Gleichung genügende Ebene die Fläche berührt, die Ausdrücke

$$x = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial t}{\partial v}, \quad z = \frac{\partial t}{\partial w}. \tag{64.}$$

Anmerkung. Versteht man unter s_1, $F_1(s_1)$ diejenigen beiden complexen Grössen, welche zu den im Vorhergehenden durch s, $F(s)$ bezeichneten conjugirt sind, so wird durch die Gleichungen

$$x = \frac{1-s^2}{2}\frac{d^2F(s)}{ds^2} + s\frac{dF(s)}{ds} - F(s) + \frac{1-s_1^2}{2}\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2} + s_1\frac{dF_1(s_1)}{ds_1} - F_1(s_1),$$

$$y = i\frac{1+s^2}{2}\frac{d^2F(s)}{ds^2} - is\frac{dF(s)}{ds} + iF(s) - i\frac{1+s_1^2}{2}\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2} + is_1\frac{dF_1(s_1)}{ds_1} - iF_1(s_1),$$

$$z = s\frac{d^2F(s)}{ds^2} - \frac{dF(s)}{ds} + s_1\frac{d^2F_1(s_1)}{ds_1^2} - \frac{dF_1(s_1)}{ds_1}$$

stets eine reelle Minimalfläche gegeben. Umgekehrt kann durch diese Formeln, wenn man die Grössen s, s_1, $F(s)$, $F_1(s_1)$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annimmt, jede reelle Minimalfläche dargestellt werden.

Dazu ist noch zu bemerken: Versteht man unter s, s_1 zwei von einander unabhängige Grössen, und unter $F(s)$, $F_1(s_1)$ beliebige analytische Functionen derselben, so wird durch die Gleichungen (35.) im Gebiete der Grössen x, y, z stets ein analytisches Gebilde definirt, das die partielle Differentialgleichung, durch welche sämmtliche Minimalflächen definirt werden können, befriedigt — ein Gebilde, das man aus diesem Grunde auch in dem Falle, wo die Punkte desselben alle oder zum Theil imaginär sind, im analytischen Sinne eine Minimalfläche zu nennen pflegt.

ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN ÜBER $2n$-FACH PERIODISCHE FUNCTIONEN VON n VERÄNDERLICHEN.

Einleitung.

Eine analytische Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von n unbeschränkt veränderlichen Argumenten kann die Eigenschaft besitzen, dass für bestimmte Systeme constanter Grössen $P_1, \dots P_n$ bei beliebigen Werthen von $u_1, \dots u_n$ die Gleichung

$$\varphi(u_1 + P_1, \dots u_n + P_n) = \varphi(u_1, \dots u_n)$$

besteht. Die Function heisst alsdann periodisch, und jedes einzelne Grössen-System $(P_1, \dots P_n)$ ein Periodensystem derselben.

Aus dieser Definition ergiebt sich in bekannter Weise der Satz:

Sind $(P_1', \dots P_n')$, $(P_1'', \dots P_n'')$, $\dots$ $(P_1^{(r)}, \dots P_n^{(r)})$ irgend r Periodensysteme der Function, so lassen sich aus denselben unendlich viele andere $(P_1, \dots P_n)$ ableiten, indem man r ganze Zahlen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_r$ willkürlich annimmt und

$$\begin{aligned} P_1 &= \nu_1 P_1' + \nu_2 P_1'' + \cdots + \nu_r P_1^{(r)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= \nu_1 P_n' + \nu_2 P_n'' + \cdots + \nu_r P_n^{(r)} \end{aligned}$$

setzt. — Die Function heisst r-fach periodisch, wenn sich alle ihre Periodensysteme auf diese Weise aus r von ihnen, aber nicht aus weniger als r zusammensetzen lassen.

Dieses gilt, wie die betrachtete Function im Übrigen auch beschaffen sein möge;*) im Folgenden ist jedoch, was hier ein für allemal bemerkt werden

*) Ist die Function mehrdeutig, so muss die Gleichung

$$\varphi(u_1 + P_1, \dots u_n + P_n) = \varphi(u_1, \dots u_n)$$

in dem Sinne gelten, dass jedem Werthe von $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ein ihm gleicher Werth von $\varphi(u_1 + P_1, \dots u_n + P_n)$ entspricht, und umgekehrt.

möge, überall wo von einer periodischen Function die Rede ist, darunter eine solche zu verstehen, die nicht nur eindeutig ist, sondern auch bei endlichen Werthen ihrer Argumente den Charakter einer rationalen Function besitzt. Ferner wird angenommen, dass dieselbe nicht als Function von weniger als n Veränderlichen, die lineare Functionen der ursprünglichen sind, dargestellt werden könne, und auch nicht einen constanten Werth habe. Unter diesen Voraussetzungen gilt der Satz:

Eine Function von n Veränderlichen kann höchstens $2n$-fach periodisch sein.

Daraus folgt unter anderem als Corollar:

Ist eine Function r-fach periodisch, und sind

$$(P'_1, \dots P'_n), \quad (P''_1, \dots P''_n), \quad \dots \quad (P^{(r+1)}_1, \dots P^{(r+1)}_n)$$

irgend $(r+1)$ Periodensysteme derselben, so bestehen unter den Grössen (P) n Gleichungen

$$\begin{aligned} \nu_1 P'_1 + \nu_2 P''_1 + \cdots + \nu_{r+1} P^{(r+1)}_1 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \nu_1 P'_n + \nu_2 P''_n + \cdots + \nu_{r+1} P^{(r+1)}_n &= 0, \end{aligned}$$

in denen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{r+1}$ ganze Zahlen sind.

Einfach periodische Functionen eines Arguments kennt man lange. Aber erst seit der Begründung der Theorie der elliptischen und Abelschen Transcendenten weiss man, dass doppelt periodische Functionen eines Arguments, vierfach periodische zweier Argumente u. s. w. existiren; und hat zugleich in der Θ-Function von n Argumenten die Quelle entdeckt, aus der unendlich viele $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen entspringen. Hierüber will ich zunächst das für die folgenden Untersuchungen Erforderliche beibringen.

Es sei

$$G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$$

eine ganze homogene Function zweiten Grades der $2n$ Grössen $u_1, \dots u_n$; $\nu_1, \dots \nu_n$ mit gegebenen Coefficienten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass

1) bei reellen Werthen von $\nu_1, \dots \nu_n$, wofern dieselben nicht sämmtlich

gleich Null sind, der reelle Theil von $G(0, \dots 0; \nu_1, \dots \nu_n)$ beständig negativ sein muss;

2) die Determinante der n linearen Functionen von $u_1, \dots u_n$

$$\frac{\partial G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}{\partial \nu_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}{\partial \nu_n}$$

nicht verschwinden darf.

Dann hat die Reihe der Grössen, die aus dem Ausdruck

$$e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)}$$

dadurch hervorgehen, dass für $\nu_1, \dots \nu_n$ alle möglichen Verbindungen von n ganzen Zahlen gesetzt werden, stets eine endliche Summe, die Jacobische Function benannt und mit

$$\Theta(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnet werden möge.*)

Die so definirte Function $\Theta(u_1, \dots u_n)$, welche bei endlichen Werthen der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ stets einen ebenfalls endlichen Werth hat und überhaupt wie eine ganze Function sich verhält, besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass für bestimmte Systeme constanter Grössen $w_1, \dots w_n$ die Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \Theta(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n) = \Theta(u_1, \dots u_n) . e^{W_1 u_1 \cdots + W_n u_n + W_{n+1}}$$

besteht, wo $W_1, \dots W_{n+1}$ ebenfalls Constanten bezeichnen.

Bezeichnet man nämlich, unter α, wie überhaupt im Folgenden unter den ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, eine Zahl aus der Reihe $1, \dots n$ verstehend,

$$\frac{\partial G}{\partial u_\alpha} \text{ mit } G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)_\alpha, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu_\alpha} \text{ mit } G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)_{n+\alpha},$$

so hat man für beliebige Grössen $w_1, \dots w_n; \lambda_1, \dots \lambda_n$ die Gleichung

$$\begin{aligned} G(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n; \nu_1, \dots \nu_n) = {} & G(u_1, \dots u_n; \nu_1 + \lambda_1, \dots \nu_n + \lambda_n) \\ & + \sum_\alpha \left(u_\alpha + \frac{1}{2} w_\alpha\right) G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_\alpha \\ & + \sum_\alpha \left(\nu_\alpha + \frac{1}{2} \lambda_\alpha\right) G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_{n+\alpha}. \end{aligned}$$

*) Die Bedingungen, unter denen die Θ-Reihe convergirt, finden sich in der folgenden Abhandlung erörtert.

Bestimmt man nun, unter $\varkappa_1, \dots \varkappa_n$ gleichfalls willkürlich anzunehmende Grössen verstehend, $w_1, \dots w_n$ mittels der Gleichungen

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_{n+\alpha} = 2\varkappa_\alpha \pi i, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so erhält man

$$w_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \omega'_{\alpha\beta})$$

und

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta}),$$

wo die $\omega_{\alpha\beta}, \omega'_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta}, \eta'_{\alpha\beta}$ rational aus den Coefficienten von $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$ zusammengesetzte Grössen sind. Nimmt man nun

$$\varkappa_1, \dots \varkappa_n; \ \lambda_1, \dots \lambda_n \text{ ebenso wie } \nu_1, \dots \nu_n$$

sämmtlich als ganze Zahlen an, so ist

$$\sum_{(\nu_1, \dots \nu_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1 + \lambda_1, \dots \nu_n + \lambda_n) + \sum_\alpha 2\nu_\alpha \varkappa_\alpha \pi i} = \sum_{(\nu_1, \dots \nu_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)};$$

und so ergiebt sich

$$\text{(B)} \qquad \Theta(u_1 + w_1, \dots u_n + w_n) = (-1)^{\sum_\alpha \varkappa_\alpha \lambda_\alpha} \cdot \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha W_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2} w_\alpha)},$$

wo

$$\text{(B, a)} \qquad \begin{cases} w_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \omega'_{\alpha\beta}) \\ W_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda_\beta \eta'_{\alpha\beta}). \end{cases}$$

In dieser Gleichung sind namentlich die folgenden $2n$ enthalten:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \Theta(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega_{n\beta}) = \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega_{\alpha\beta})} \\ \Theta(u_1 + 2\omega'_{1\beta}, \dots u_n + 2\omega'_{n\beta}) = \Theta(u_1, \dots u_n) e^{\sum_\alpha 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega'_{\alpha\beta})} \end{cases} \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

Da in dem Ausdrucke

$$G(u_1, \dots u_n; \nu_1, \dots \nu_n)$$

$n(2n+1)$ Constanten vorkommen, so müssen unter den Grössen (ω, η) Relationen stattfinden, deren Anzahl $n(2n-1)$ ist.

Betrachtet man die in w_α, W_α vorkommenden Grössen $\varkappa, \lambda$ wieder als willkürlich anzunehmende, und setzt, unter $\varkappa'_1, \dots \varkappa'_n; \lambda'_1, \dots \lambda'_n$ ein zweites solches System verstehend,

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} w'_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa'_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2\lambda'_\beta \omega'_{\alpha\beta}) \\ W'_\alpha = \sum_\beta (2\varkappa'_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2\lambda'_\beta \eta'_{\alpha\beta}), \end{cases}$$

so hat man

$$\sum_\alpha (w_\alpha G(w'_1, \dots w'_n; -\lambda'_1, \cdots -\lambda'_n)_\alpha - \lambda_\alpha G(w'_1, \dots w'_n; -\lambda'_1, \cdots -\lambda'_n)_{n+\alpha})$$
$$= \sum_\alpha (w'_\alpha G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_\alpha - \lambda'_\alpha G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \cdots -\lambda_n)_{n+\alpha}),$$

oder

$$\text{(E)} \qquad \sum_\alpha (W_\alpha w'_\alpha - w_\alpha W'_\alpha) = 2\pi i \cdot \sum_\alpha (\varkappa_\alpha \lambda'_\alpha - \lambda_\alpha \varkappa'_\alpha).$$

In dieser Gleichung sind der Willkürlichkeit der Grössen $(\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda')$ halber die folgenden $n(2n-1)$ enthalten, aus denen sie dann wieder hervorgeht:

$$\text{(E,a)} \qquad \begin{cases} \sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\alpha (\eta'_{\alpha\beta}\omega'_{\alpha\gamma} - \omega'_{\alpha\beta}\eta'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta}\omega'_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta}\eta'_{\alpha\gamma}) = \begin{cases} \frac{\pi i}{2}, & \text{wenn } \gamma = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \gamma \gtrless \beta. \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man in (E) $\lambda'_\beta = 1$, die übrigen Grössen $\varkappa', \lambda'$ aber sämmtlich gleich Null; und hierauf $\varkappa'_\beta = 1$, die übrigen $\varkappa', \lambda'$ gleich Null, so erhält man

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} 2\varkappa_\beta \pi i = \sum_\alpha (2\omega'_{\alpha\beta} W_\alpha - 2\eta'_{\alpha\beta} w_\alpha) \\ -2\lambda_\beta \pi i = \sum_\alpha (2\omega_{\alpha\beta} W_\alpha - 2\eta_{\alpha\beta} w_\alpha). \end{cases}$$

Aus den unter (E,a) aufgestellten Gleichungen ergiebt sich

$$\text{(G)} \qquad \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = \begin{vmatrix} \omega'_{11}, \dots \omega'_{n1}, & -\eta'_{11}, \dots -\eta'_{n1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \omega'_{1n}, \dots \omega'_{nn}, & -\eta'_{1n}, \dots -\eta'_{nn} \\ \omega_{11}, \dots \omega_{n1}, & -\eta_{11}, \dots -\eta_{n1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \omega_{1n}, \dots \omega_{nn}, & -\eta_{1n}, \dots -\eta_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{11}, \dots \eta_{1n}, & \eta'_{11}, \dots \eta'_{1n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \eta_{n1}, \dots \eta_{nn}, & \eta'_{n1}, \dots \eta'_{nn} \\ \omega_{11}, \dots \omega_{1n}, & \omega'_{11}, \dots \omega'_{1n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \omega_{n1}, \dots \omega_{nn}, & \omega'_{n1}, \dots \omega'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Es ist also die Determinante der als Functionen von $\varkappa_1, \dots \varkappa_n; \lambda_1, \dots \lambda_n$ betrachteten $W_1, \dots W_n; w_1, \dots w_n$ nicht gleich Null, so dass die letzteren Grössen für kein System von Werthen der ersteren, dessen Elemente nicht alle gleich Null sind, sämmtlich verschwinden können. Werden daher die Ausdrücke (F) der $\varkappa_\alpha, \lambda_\alpha$ in die Gleichungen (B,a) eingesetzt, so müssen in jeder der so entstehenden Gleichungen die Coefficienten der einzelnen W_α, w_α

sämmtlich gleich Null sein. So erhält man $n(2n-1)$ neue Relationen unter den ω, η:

$$(H) \qquad \begin{cases} \sum_\gamma (\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\gamma (\eta_{\alpha\gamma}\eta'_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma}) = 0 \\ \sum_\gamma (\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma}) = \begin{cases} \frac{\pi i}{2}, & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \alpha \gtrless \beta. \end{cases} \end{cases}$$

Diese Relationen sind somit eine Folge der unter (E,a) aufgestellten, so wie auch, was in ganz ähnlicher Weise gezeigt werden kann, diese eine Folge jener.

In der Theorie der Abelschen Transcendenten wird ferner gezeigt, dass sich, wenn ein den Gleichungen (E,a) genügendes System von $4n^2$ Grössen ω, η gegeben ist, auch stets eine Function $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$, aus der es auf die angegebene Weise hervorgeht, bilden lässt, vorausgesetzt dass die Determinante

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega_{11}, & \dots & \omega_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1}, & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.*)

Bezeichnet man mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ den Werth, welchen ω annimmt, wenn man $\omega_{\alpha\beta} = 1$, die übrigen der α^{ten} Horizontal- und der β^{ten} Verticalreihe angehörigen Elemente aber gleich Null setzt, so ergeben sich aus den ersten der Relationen (E,a) und (H) noch die folgenden:

$$(I) \qquad \begin{cases} \sum_\gamma (\omega)_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\gamma} = \sum_\gamma (\omega)_{\beta\gamma}\eta_{\alpha\gamma} \\ \sum_\gamma (\omega)_{\gamma\alpha}\omega'_{\gamma\beta} = \sum_\gamma (\omega)_{\gamma\beta}\omega'_{\gamma\alpha}. \end{cases}$$

*) Setzt man in den Gleichungen

$$G(w_1, \dots w_n; -\lambda_1, \dots -\lambda_n)_{n+\alpha} = 2\varkappa_\alpha \pi i \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

die λ sämmtlich gleich Null, so erhält man nach dem Obigen

$$w_\alpha = \sum_\beta 2\varkappa_\beta \omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

wenn, wie angenommen worden, die Determinante der Functionen $G(w_1, \dots w_n; 0 \dots 0)_{n+\alpha}$ in Beziehung auf $w_1, \dots w_n$ von Null verschieden ist. Daraus folgt, dass auch die Determinante ω nicht gleich Null sein darf, wenn es möglich sein soll, eine Function G so herzustellen, dass sie ein gegebenes Grössensystem (ω, η) liefert.

Mit Hülfe derselben wird dann gezeigt, dass, wenn man

$$(K)\quad \begin{cases} \eta_1(u_1, \dots u_n) = \dfrac{1}{2\omega} \sum\limits_{\alpha\beta\gamma} (\omega)_{\alpha\gamma}\, \eta_{\beta\gamma}\, u_\alpha u_\beta \\ \tilde{\omega}(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) = \dfrac{\pi i}{\omega} \sum\limits_{\alpha} (v_1(\omega)_{\alpha 1} + \dots + v_n(\omega)_{\alpha n})(u_\alpha + v_1 \omega'_{\alpha 1} + \dots + v_n \omega'_{\alpha n}) \\ G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) = \eta_1(u_1, \dots u_n) + \tilde{\omega}(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) \end{cases}$$

setzt, diese Function G die verlangte Beschaffenheit hat.*)

Führt man statt $u_1, \dots u_n$ eben so viele lineare Functionen $v_1, \dots v_n$ dieser Veränderlichen ein mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_\beta 2\omega_{\alpha\beta} v_\beta, \\ v_\alpha &= \frac{1}{2\omega} \sum_\beta (\omega)_{\beta\alpha} u_\beta, \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und setzt

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{\omega} \sum_\gamma (\omega)_{\gamma\alpha}\, \omega'_{\gamma\beta},$$

wo dann

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

ist; so wird

$$(L)\quad G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) = 2\sum_{\alpha\beta\gamma} \eta_{\gamma\alpha}\, \omega_{\gamma\beta} v_\alpha v_\beta + \pi i \sum_\alpha v_\alpha (2v_\alpha + v_1 \tau_{\alpha 1} + \dots + v_n \tau_{\alpha n}).$$

Werden ferner die Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ so gewählt, dass bei reellen Werthen von $v_1, \dots v_n$ der reelle Theil von

$$i \sum_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \tau_{\alpha\beta}$$

beständig negativ ist; so existirt hiernach auch stets eine Function

$$\Theta(u_1, \dots u_n),$$

---

*) Dabei ist zu beachten, dass die Coefficienten der Function $\tilde{\omega}$ bloss aus den Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ (ohne Hinzutreten der $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$) zusammengesetzt werden. Es ist also stets möglich, die verlangte Function $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$ herzustellen, wenn die $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ so angenommen werden, dass die $\frac{n}{2} n(n-1)$ Relationen

$$\sum_\gamma (\omega_{\alpha\gamma}\, \omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\, \omega'_{\alpha\gamma}) = 0$$

bestehen, und die Determinante ω nicht gleich Null ist. Für $\eta_1(u_1, \dots u_n)$ kann dann eine beliebige homogene ganze Function zweiten Grades von $u_1, \dots u_n$ gewählt werden. Dieselbe kann auch Null sein.

für welche das oben definirte Grössensystem (ω, η) mit dem gegebenen übereinstimmt.

Die für die Convergenz der Reihe, durch welche $\theta(u_1, \dots u_n)$ definirt worden ist, nothwendige Bedingung, dass der reelle Theil von

$$i \sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \tau_{\alpha\beta}$$

bei reellen Werthen von $\nu_1, \dots \nu_n$ beständig negativ sein muss, lässt sich noch in einer anderen Form ausdrücken, deren Kenntniss für das Folgende von Wichtigkeit ist.

Man setze, unter $p_1, \dots p_n$ willkürlich anzunehmende Grössen verstehend,

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta 2p_\beta \omega_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{n+\alpha} = \sum_\beta 2p_\beta \omega'_{\beta\alpha},$$

und bezeichne die mit

$$p_\beta, \ \omega_{\beta\alpha}, \ \omega'_{\beta\alpha}, \ \Omega_\alpha, \ \Omega_{n+\alpha}, \ \tau_{\alpha\beta}$$

conjugirten complexen Grössen beziehlich durch

$$\overline{p}_\beta, \ \overline{\omega}_{\beta\alpha}, \ \overline{\omega}'_{\beta\alpha}, \ \overline{\Omega}_\alpha, \ \overline{\Omega}_{n+\alpha}, \ \overline{\tau}_{\alpha\beta}.$$

Dann ist

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha \overline{\Omega}_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta\gamma} 4p_\beta \overline{p}_\gamma \omega_{\beta\alpha} \overline{\omega}'_{\gamma\alpha}.$$

Ferner ist

$$2p_\beta = \sum_\delta \frac{(\omega)_{\beta\delta}}{\omega} \Omega_\delta,$$

$$\sum_\gamma 2p_\gamma \omega'_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma\delta} \frac{(\omega)_{\gamma\delta} \omega'_{\gamma\alpha}}{\omega} \Omega_\delta = \sum_\delta \Omega_\delta \tau_{\alpha\delta} = \sum_\beta \Omega_\beta \tau_{\alpha\beta},$$

und somit

$$\sum_\gamma 2\overline{p}_\gamma \overline{\omega}'_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \overline{\Omega}_\beta \overline{\tau}_{\alpha\beta},$$

also

$$\sum_\alpha \Omega_\alpha \overline{\Omega}_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \overline{\Omega}_\beta \overline{\tau}_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha \overline{\Omega}_\alpha \Omega_{n+\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \overline{\Omega}_\alpha \Omega_\beta \tau_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \overline{\Omega}_\beta \tau_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \overline{\Omega}_\beta \tau_{\alpha\beta},$$

$$\text{(M)} \qquad i \sum_\alpha (\Omega_\alpha \overline{\Omega}_{n+\alpha} - \overline{\Omega}_\alpha \Omega_{n+\alpha}) = -i \sum_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \overline{\Omega}_\beta (\tau_{\alpha\beta} - \overline{\tau}_{\alpha\beta}).$$

Setzt man dann

$$\Omega_\alpha = \mu_\alpha + \nu_\alpha i, \quad \overline{\Omega}_\alpha = \mu_\alpha - \nu_\alpha i,$$

so sind μ_α, ν_α reelle Grössen, und man erhält mit Berücksichtigung der Relationen $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, $\overline{\tau}_{\alpha\beta} = \overline{\tau}_{\beta\alpha}$

$$-i\sum_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\overline{\Omega}_\beta(\tau_{\alpha\beta}-\overline{\tau}_{\alpha\beta}) = -i\sum_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}-\overline{\tau}_{\alpha\beta})(\mu_\alpha\mu_\beta+\nu_\alpha\nu_\beta),$$

wo der Ausdruck auf der Rechten unter den für die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ gemachten Annahmen stets positiv ist, wenn nicht die μ_α, ν_α sämmtlich verschwinden.

Es müssen also die Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, wenn sich eine zu ihnen gehörige ϑ-Function soll herstellen lassen, so beschaffen sein, dass der Ausdruck

$$i\sum_\alpha(\Omega_\alpha\overline{\Omega}_{n+\alpha}-\overline{\Omega}_\alpha\Omega_{n+\alpha}),$$

in welchem

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta 2p_\beta\omega_{\beta\alpha}, \quad \Omega_{n+\alpha} = \sum_\beta 2p_\beta\omega'_{\beta\alpha}$$

ist, und $\overline{\Omega}_\alpha$, $\overline{\Omega}_{n+\alpha}$ die mit Ω_α, $\Omega_{n+\alpha}$ conjugirten Grössen bedeuten, bei willkürlichen Werthen der $p_1, \dots p_n$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv ist. Die hierzu erforderlichen Bedingungen werden später angegeben werden.

Nimmt man ferner die μ_α, ν_α willkürlich an, und setzt

$$\Omega_\alpha = \mu_\alpha + \nu_\alpha i, \quad 2p_\beta = \sum_\delta \frac{(\omega)_{\beta\delta}}{\omega}\Omega_\delta,$$

so gilt die Gleichung (M). Daraus folgt, dass die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ auch stets die erforderliche Beschaffenheit haben, wenn die $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ der vorstehenden Bedingung entsprechend angenommen werden.

Setzt man ferner

$$\vartheta(v_1, \dots v_n) = \sum_{(\nu)}\left\{e^{\sum_\alpha \nu_\alpha(2v_\alpha+\nu_1\tau_{\alpha 1}+\cdots+\nu_n\tau_{\alpha n})\pi i}\right\},$$

oder

$$\text{(N)} \qquad \vartheta(v_1, \dots v_n) = \sum_{(\nu)}\left\{e^{\pi i\sum_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta\tau_{\alpha\beta}}\cdot\cos(2\nu_1 v_1+\cdots+2\nu_n v_n)\pi\right\},$$

so hat man

$$\text{(N, a)} \qquad \theta(u_1, \dots u_n) = e^{\eta(u_1, \dots u_n)}\vartheta(v_1, \dots v_n),$$

wenn für $v_1, \dots v_n$ die angegebenen linearen Functionen von $u_1, \dots u_n$ gesetzt werden.

Betrachtet man $v_1, \dots v_n$ als unabhängige Veränderliche, so ist $\vartheta(v_1, \dots v_n)$ diejenige θ-Function, bei der an die Stelle von G die Function

$$\sum_\alpha \nu_\alpha (2v_\alpha + \nu_1 \tau_{\alpha 1} + \dots + \nu_n \tau_{\alpha n}) \pi i$$

tritt. Daraus ergiebt sich, dass für sie das System der Grössen ω, η das folgende ist:

$$(0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}, 0, \dots 0, \frac{1}{2}\tau_{11}, \frac{1}{2}\tau_{12}, \dots \frac{1}{2}\tau_{1n} \\ 0, \frac{1}{2}, \dots 0, \frac{1}{2}\tau_{21}, \frac{1}{2}\tau_{22}, \dots \frac{1}{2}\tau_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tau_{n1}, \frac{1}{2}\tau_{n2}, \dots \frac{1}{2}\tau_{nn} \end{array} \right\} (\omega) \\ \left. \begin{array}{l} 0, 0, \dots 0, \frac{\pi}{i}, 0, \dots 0 \\ 0, 0, \dots 0, 0, \frac{\pi}{i}, \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots 0, 0, 0, \dots \frac{\pi}{i} \end{array} \right\} (\eta). \end{array} \right.$$

Die obige Gleichung (B) nimmt hierauf für $\vartheta(v_1, \dots v_n)$ die Gestalt an:

$$(P) \qquad \vartheta(v_1 + w_1, \dots v_n + w_n) = \vartheta(v_1, \dots v_n) . e^{-\sum_\alpha \lambda_\alpha (2v_\alpha + \lambda_1 \tau_{\alpha 1} + \dots + \lambda_n \tau_{\alpha n}) \pi i}$$
$$(w_\alpha = \varkappa_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \tau_{\alpha\beta}).$$

Dieses vorausgeschickt, bezeichne man nun, unter C eine willkürliche, und unter

$$a_1, \dots a_n;\ a'_1, \dots a'_n;\ \dots\dots\ a_1^{(m)}, \dots a_n^{(m)}$$
$$b_1, \dots b_n;\ b'_1, \dots b'_n;\ \dots\dots\ b_1^{(m)}, \dots b_n^{(m)}$$

solche Constanten verstehend, die den Bedingungsgleichungen

$$a_\alpha + a'_\alpha \dots + a_\alpha^{(m)} = b_\alpha + b'_\alpha \dots + b_\alpha^{(m)} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

genügen, im Übrigen aber auch beliebige Werthe haben können, den Aus-

druck

$$(Q)\quad C\cdot\frac{\Theta(u_1+a_1,\dots u_n+a_n)\,\Theta(u_1+a_1',\dots u_n+a_n')\dots\Theta(u_1+a_1^{(m)},\dots u_n+a_n^{(m)})}{\Theta(u_1+b_1,\dots u_n+b_n)\,\Theta(u_1+b_1',\dots u_n+b_n')\dots\Theta(u_1+b_1^{(m)},\dots u_n+b_n^{(m)})}\quad\text{mit}\quad\wp(u_1,\dots u_n),$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (C) die folgenden:

$$\begin{aligned}\wp(u_1+2\omega_{1\beta},\dots u_n+2\omega_{n\beta}) &= \wp(u_1,\dots u_n),\\ \wp(u_1+2\omega'_{1\beta},\dots u_n+2\omega'_{n\beta}) &= \wp(u_1,\dots u_n).\end{aligned}\qquad(\beta=1,\dots n)$$

Die so definirte Function $\wp(u_1,\dots u_n)$ besitzt also bei endlichen Werthen der Veränderlichen $u_1,\dots u_n$ den Charakter einer rationalen Function, und hat die $2n$ Periodensysteme

$$\begin{gathered}(2\omega_{11},\dots 2\omega_{n1}),\ \dots\ (2\omega_{1n},\dots 2\omega_{nn}),\\ (2\omega'_{11},\dots 2\omega'_{n1}),\ \dots\ (2\omega'_{1n},\dots 2\omega'_{nn}).\end{gathered}$$

Dasselbe gilt von jeder Function $\varphi(u_1,\dots u_n)$, welche sich rational durch $\wp(u_1,\dots u_n)$ oder auch durch mehrere Functionen dieser Art, die sämmtlich aus derselben Θ-Function entspringen, ausdrücken lässt.

Die Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ sind ferner so beschaffen, dass die n Gleichungen

$$\sum_\beta(2\varkappa_\beta\omega_{\alpha\beta}+2\lambda_\beta\omega'_{\alpha\beta})=0\qquad(\alpha=1,\dots n)$$

nicht durch ein System ganzzahliger Werthe von $\varkappa_1,\dots\varkappa_n$; $\lambda_1,\dots\lambda_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, befriedigt werden können. Denn gäbe es ein solches, so müsste, wenn

$$W_\alpha=\sum_\beta(2\varkappa_\beta\eta_{\alpha\beta}+2\lambda_\beta\eta'_{\alpha\beta})$$

gesetzt wird, der obigen Gleichung (B) zufolge

$$\Theta(u_1,\dots u_n)=(-1)^{\sum_\alpha\varkappa_\alpha\lambda_\alpha}\Theta(u_1,\dots u_n)\,e^{\sum_\alpha W_\alpha u_\alpha},$$

also

$$\sum_\beta(2\varkappa_\beta\eta_{\alpha\beta}+2\lambda_\beta\eta'_{\alpha\beta})=0\qquad(\alpha=1,\dots n)$$

sein, was nicht möglich ist, da nach Gleichung (G) die Determinante

$$\begin{vmatrix}\omega_{11},&\dots&\omega_{1n},&\omega'_{11},&\dots&\omega'_{1n}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \eta_{n1},&\dots&\eta_{nn},&\eta'_{n1},&\dots&\eta'_{nn}\end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.

Daraus folgt, dem oben Bemerkten gemäss,*) dass jede auf die angegebene Weise gebildete Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ eine $2n$-fach periodische ist, wenn auch möglicherweise die angegebenen $2n$ Periodensysteme keine primitiven sind, d. h. solche, aus denen alle übrigen auf die im Anfange beschriebene Weise abgeleitet werden können.

Hiermit ist also die Existenz unendlich vieler $2n$-fach periodischer Functionen von n Argumenten nachgewiesen. Diejenigen, zu welchen die Theorie der elliptischen und Abelschen Transcendenten geführt hat, gehören sämmtlich zu den hier beschriebenen; wobei jedoch zu bemerken ist, dass die im Vorstehenden definirte θ-Function, sobald $n > 3$, allgemeiner ist als die durch jene Theorie gelieferte, indem bei der letzteren unter den Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ noch andere Relationen als die unter (H) angegebenen bestehen.

Es hat aber die Theorie der doppelt periodischen Functionen eines Arguments einen höchst befriedigenden Abschluss in dem fundamentalen Satze gefunden, dass jede solche Function in der im Vorstehenden angegebenen Weise durch eine θ-Function ausgedrückt werden kann. Es drängt sich daher die Frage auf, ob für die $2n$-fach periodischen Functionen von n Argumenten, wenn $n > 1$, ein analoges Theorem gelte, oder ob es ausser den durch eine θ-Function von n Argumenten ausdrückbaren Functionen dieser Art noch andere gebe. Man begegnet aber, wenn man auf diese Frage näher eingeht, sofort einer sehr wesentlichen Schwierigkeit, welche es unmöglich macht, die Untersuchung auf dieselbe einfache Weise wie für die Functionen eines Arguments durchzuführen.

Es seien nämlich

$$(P_{1,1}, \dots P_{n,1}),\ (P_{1,2}, \dots P_{n,2}),\ \dots\ (P_{1,2n}, \dots P_{n,2n})$$

irgend $2n$ primitive Periodensysteme einer Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$, welche in der beschriebenen Weise aus einer bestimmten θ-Function entspringt. Dann hat man, die oben eingeführten Bezeichnungen beibehaltend,

$$2\omega_{\alpha\gamma} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\gamma,\varkappa} P_{\alpha,\varkappa},$$

$$2\omega'_{\alpha\gamma} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{n+\gamma,\varkappa} P_{\alpha,\varkappa},$$

*) S. 54.

wo die m sämmtlich ganze Zahlen sind. Aus der Gleichung

$$\sum_{\gamma}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma}-\omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0$$

ergeben sich daher $\frac{1}{2}n(n-1)$ unter den Grössen $P_{\alpha,\varkappa}$ stattfindende Relationen von der Gestalt

$$\text{(R)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}((\varkappa,\lambda)P_{\alpha,\varkappa}P_{\beta,\lambda}) = 0, \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,\dots n\\ \beta=1,\dots n\end{pmatrix}$$

wo die von den Indices α, β unabhängigen Coefficienten $(\varkappa,\lambda)$ ganze Zahlen und so beschaffen sind, dass

$$(\varkappa,\lambda) = -(\lambda,\varkappa).$$

Setzt man ferner

$$P_{\varkappa} = \sum_{\beta} p_{\beta}P_{\beta,\varkappa},$$

so verwandeln sich die oben mit Ω_{α}, Ω'_{α} bezeichneten Ausdrücke in

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\alpha,\varkappa}P_{\varkappa}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{n+\alpha,\varkappa}P_{\varkappa},$$

und man erhält, wenn $\overline{P}_{\varkappa}$ die mit $P_{\varkappa}$ conjugirte Grösse bedeutet, für die $P_{\beta,\varkappa}$ die Bedingung, dass der Ausdruck

$$\text{(S)} \qquad i\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)P_{\varkappa}\overline{P}_{\lambda}$$

stets einen positiven Werth haben muss, wenn die $p_1, \dots p_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind.

Setzt man nun

$$P_{\alpha,\varkappa} = Q_{\alpha,\varkappa}+iR_{\alpha,\varkappa}, \quad p_{\beta} = \xi_{\beta}+i\eta_{\beta}$$

(wo die Q, R, ξ, η reelle Grössen bedeuten) und

$$(QQ)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)Q_{\alpha,\varkappa}Q_{\beta,\lambda},$$
$$(QR)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)Q_{\alpha,\varkappa}R_{\beta,\lambda},$$
$$(RR)_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)R_{\alpha,\varkappa}R_{\beta,\lambda},$$

so ist in Folge der Relation $(\varkappa,\lambda) = -(\lambda,\varkappa)$

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases}(QQ)_{\alpha\beta} = -(QQ)_{\beta\alpha}, & (QQ)_{\alpha\alpha} = 0,\\ (RR)_{\alpha\beta} = -(RR)_{\beta\alpha}, & (RR)_{\alpha\alpha} = 0;\end{cases}$$

und die Gleichungen (R) besagen, dass

$$(QQ)_{\alpha\beta} = (RR)_{\alpha\beta}, \quad (QR)_{\alpha\beta} = (QR)_{\beta\alpha},$$

so dass also unter den $4n^2$ Grössen Q, R, sobald $n > 1$, $n(n-1)$ Relationen bestehen. Der Ausdruck (S) aber lässt sich mit Berücksichtigung dieser Relationen in

$$(U) \qquad 2\sum_{\alpha\beta}((QR)_{\alpha\beta} + i(QQ)_{\alpha\beta})(\xi_\alpha + \eta_\alpha i)(\xi_\beta - \eta_\beta i)$$

umgestalten; und dieser muss also bei reellen Werthen der Grössen ξ, η, wenn dieselben nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv sein. Dazu ist bekanntlich erforderlich, dass n bestimmte, aus den Grössen $(QR)_{\alpha\beta}$, $(QQ)_{\alpha\beta}$ zusammengesetzte Ausdrücke positive Werthe haben.

Hiernach müssen, wenn eine $2n$-fach periodische Function von n Argumenten in der angegebenen Weise mittels einer Θ-Function darstellbar sein soll, die Elemente ihrer Periodensysteme — so mögen die Grössen $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ genannt werden — bestimmte, theils durch Gleichungen, theils durch Ungleichheiten ausgedrückte Bedingungen erfüllen. Wenn es sich also um die Aufstellung des allgemeinsten Ausdruckes einer Function der in Rede stehenden Art handelt, so ist zunächst zu untersuchen, ob für jede solche Function die Wahl der Elemente ihrer Periodensysteme Beschränkungen unterworfen ist, und ob, wenn sich dies so verhält, dieselben mit den im Vorstehenden ermittelten zusammenfallen oder nicht. Es ist mir aber erst nach manchen vergeblichen Bemühungen gelungen, zur Durchführung dieser Untersuchung einen geeigneten Weg aufzufinden.

In einer frühern Abhandlung (Monatsbericht der Berliner Akademie vom 2. Dec. 1869)*) habe ich auseinandergesetzt, wie jede $2n$-fach periodische Function von n Veränderlichen mit einem Systeme von n Abelschen Integralen erster Gattung in der Art im Zusammenhang steht, dass je n zusammengehörige Perioden dieser Integrale auch ein Periodensystem jener Function bilden. Hierauf gestützt habe ich dann bald darauf ermittelt (und der Akademie in der Klassensitzung vom 14. Febr. 1870 mitgetheilt), dass in der That, wenn eine Function von n Argumenten $2n$ vorgeschriebene primitive Periodensysteme

$$(Q_{1,\varkappa} + iR_{1,\varkappa}, \ldots Q_{n,\varkappa} + iR_{n,\varkappa}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots 2n)$$

*) Bd. II. S. 45 dieser Ausgabe.

haben soll, die Grössen $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ den im Vorhergehenden entwickelten Bedingungen genügen müssen.

Nachdem dies festgestellt war, bot die weitere Untersuchung keine wesentliche Schwierigkeit mehr dar, und es ergab sich schliesslich der Satz:

»Jede eindeutige Function von n Argumenten, welche bei endlichen Werthen der letztern den Charakter einer rationalen Function besitzt und zugleich $2n$-fach periodisch ist, entspringt in der beschriebenen Weise aus einer θ-Function derselben Veränderlichen.«

Die Begründung dieses Theorems bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung, in der ausser einigen der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen angehörigen Sätzen die wesentlichsten Eigenschaften der Abelschen Integrale erster Gattung als bekannt vorausgesetzt werden.

§ 1.

Es bedeute jetzt $\varphi(u_1, \dots u_n)$ irgend eine bestimmte Function von der in dem aufgestellten Theorem vorausgesetzten Beschaffenheit. Dieselbe hat also folgende Eigenschaften:

1. Ist $(a_1, \dots a_n)$ ein beliebiges System endlicher Werthe der Veränderlichen $(u_1, \dots u_n)$, so besitzt die Function stets einen in der Form

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}$$

darstellbaren Zweig. Dabei sind drei wesentlich von einander verschiedene Fälle zu betrachten.

Hat G_2 an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth, so lässt sich der vorstehende Bruch auf die Form $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ bringen, und es hat also in diesem Falle, welcher der reguläre ist, $\varphi(u_1, \dots u_n)$ an allen im Innern des Convergenzbezirkes von $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ liegenden Stellen den Charakter einer ganzen Function.

Wenn ferner G_2 an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindet, G_1 aber nicht, so hat man in einer bestimmten Umgebung dieser Stelle

$$\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n)} = G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n);$$

es wird also, wenn die Differenzen $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ sämmtlich unendlich klein werden, der Werth von $\varphi(u_1, \dots u_n)$ stets unendlich gross, und ist an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ selbst gleich ∞.

Wenn endlich G_1, G_2 beide an der betrachteten Stelle verschwinden, wobei angenommen werden darf, dass sie keinen an derselben Stelle verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler $G_3(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ haben, so giebt es in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für welche die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ einen beliebig festgesetzten Werth erhält, so dass sie an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ selbst keinen bestimmten Werth hat.*)

Wir nennen — in Beziehung auf die betrachtete Function — in diesem Falle $(a_1, \dots a_n)$ eine Grenzstelle.

Die betrachteten drei Fälle unterscheiden sich ferner noch in folgender Weise von einander:

Hat $\varphi(u_1, \dots u_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen bestimmten endlichen Werth, so gilt dasselbe auch für alle Stellen, die in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ — dem Innern des Convergenzbezirkes von

$$G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$$

— liegen.

---

*) Man kann nämlich in diesem Falle, indem man an Stelle der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ ganze und homogene lineare Functionen $t_1, \dots t_n$ von $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}$$ auf die Form

$$\frac{t_1^\alpha + \mathfrak{G}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\alpha-1} \cdots + \mathfrak{G}_\alpha(t_2, \dots t_n)}{t_1^\beta + \mathfrak{G}'_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\beta-1} \cdots + \mathfrak{G}'_\beta(t_2, \dots t_n)} \cdot G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n) = \frac{\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)} \cdot G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$$

in der Art bringen, dass $\mathfrak{G}_1(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{G}_\alpha(t_2, \dots t_n)$, $\mathfrak{G}'_1(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{G}'_\beta(t_2, \dots t_n)$ Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$ sind, welche sämmtlich gleich Null werden, wenn $t_2, \dots t_n$ alle verschwinden, $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ aber an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Zugleich kann diese Umformung so geschehen, dass unter den Grössen $t_2, \dots t_n$ eine bestimmte Gleichung $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n) = 0$ bestehen muss, wenn $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ zugleich verschwinden sollen. Es giebt daher unendlich viele Systeme solcher Werthe von $t_1, t_2, \dots t_n$, für die $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ aber nicht, während zugleich jeder dieser Werthe seinem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Grösse ist. Es giebt also auch in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für die $\varphi(u_1, \dots u_n) = 0$ ist. Nun hat aber, wenn b ein beliebig angenommener Werth ist, $\varphi(u_1, \dots u_n) - b$ in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ dieselbe Form wie $\varphi(u_1, \dots u_n)$; es existiren also in jeder Umgebung dieser Stelle auch Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, für die $\varphi(u_1, \dots u_n) - b = 0$, $\varphi(u_1, \dots u_n) = b$ ist.

Ist $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$, so giebt es in derjenigen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$, innerhalb welcher $\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n)}$ den Charakter einer ganzen Function hat, keine Grenzstellen, wohl aber, sobald $n > 1$, Stellen, an denen $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ ist; diese bilden eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Wenn dagegen $(a_1, \dots a_n)$ eine Grenzstelle ist, so giebt es in jeder noch so engen Umgebung derselben nicht nur Stellen, in denen $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ ist, sondern auch, wofern $n > 2$, noch andere Grenzstellen; die ersteren bilden eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte, die letzteren eine $(2n-4)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*)

2. Es wird vorausgesetzt, dass sich $\varphi(u_1, \dots u_n)$ nicht als Function von weniger als n Argumenten, die lineare Functionen von $u_1, \dots u_n$ sind, darstellen lasse.

3. Die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ist $2n$-fach periodisch. Daraus ergiebt sich zunächst, dass man, um alle Werthe, die sie überhaupt annehmen kann, zu erhalten, nur diejenigen Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ zu betrachten hat, welche einem sofort näher zu beschreibenden, ganz im Endlichen liegenden Bereiche (U) angehören.

Es seien

$$(P_{1,1}, \dots P_{n,1}), \quad \dots \quad (P_{1,2n}, \dots P_{n,2n})$$

*) In derjenigen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$, für welche die angegebene Umformung von

$$\frac{G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}{G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)}$$

gültig ist, wird $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$, wenn man $t_1, t_2, \dots t_n$ so wählt, dass $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet, nicht aber zugleich $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n)$ und $G(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$. Giebt man dagegen den $t_2, \dots t_n$ solche Werthe $t_2', \dots t_n'$, dass $\mathfrak{G}''(t_2', \dots t_n') = 0$ ist, so kann man t_1' so bestimmen, dass $\mathfrak{G}(t_1', t_2', \dots t_n')$, $\mathfrak{G}'(t_1', t_2', \dots t_n')$ beide verschwinden, und dass zugleich, wenn $u_1', \dots u_n'$ die den $t_1', \dots t_n'$ entsprechenden Werthe von $u_1, \dots u_n$ sind, die Stelle $(u_1', \dots u_n')$ dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk von $G_1(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$, $G_2(u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n)$ angehört. Dann kann man diese Ausdrücke in andere

$$\overline{G}_1(u_1, \dots u_n | u_1', \dots u_n'), \quad \overline{G}_2(u_1, \dots u_n | u_1', \dots u_n')$$

umformen, welche beide an der Stelle $(u_1', \dots u_n')$ verschwinden, ohne einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form zu haben. Denn existirte ein solcher, so müsste derselbe, in eine Potenzreihe von $(t_1 - t_1'), \dots (t_n - t_n')$ umgeformt, ein gemeinschaftlicher Theiler der ebenso umgeformten Functionen $\mathfrak{G}(t_1, t_2, \dots t_n)$, $\mathfrak{G}'(t_1, t_2, \dots t_n)$ sein, und die oben durch $\mathfrak{G}''(t_2, \dots t_n)$ bezeichnete Function für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(t_2', \dots t_n')$ angehörenden Werthsysteme $t_2, \dots t_n$ verschwinden, also identisch gleich Null sein — was wider die Annahme ist. Daraus folgt, dass jede auf die angegebene Weise bestimmte Stelle $(u_1', \dots u_n')$ eine Grenzstelle ist, sowie auch erhellt, dass es in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ keine andern derartigen Stellen giebt.

$2n$ primitive Perioden-Systeme von $\varphi(u_1, \dots u_n)$, und es werde wieder, wie oben,

$$P_{\alpha,\varkappa} = Q_{\alpha,\varkappa} + iR_{\alpha,\varkappa} \tag{1.}$$

gesetzt, wo $Q_{\alpha,\varkappa}$, $R_{\alpha,\varkappa}$ reelle Grössen bedeuten. Dann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} Q_{1,1}, & \dots & Q_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{n,1}, & \dots & Q_{n,2n} \\ R_{1,1}, & \dots & R_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n,1}, & \dots & R_{n,2n} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null;*) und man kann daher zu jedem System endlicher Grössen $(u_1, \dots u_n)$ ein System von $2n$ ebenfalls endlichen und reellen Grössen $\xi_1, \dots \xi_{2n}$ so bestimmen, dass man

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \xi_\varkappa P_{1,\varkappa} \\ \dots \dots \dots \\ u_n = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \xi_\varkappa P_{n,\varkappa} \end{array} \right. \tag{2.}$$

hat. Nimmt man dann ein System bestimmter Werthe von $\xi_1, \dots \xi_{2n}$

$$(\xi_1^0, \dots \xi_{2n}^0)$$

beliebig an, bezeichnet mit $\nu_\varkappa$ die grösste in $(\xi_\varkappa - \xi_\varkappa^0)$ enthaltene ganze Zahl, und setzt

$$\xi_\varkappa = \xi'_\varkappa + \nu_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, \dots 2n) \tag{3.}$$

$$\bar{u}_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \xi'_\varkappa P_{\alpha,\varkappa}, \qquad (\alpha = 1, \dots n) \tag{4.}$$

so hat man

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \bar{u}_1 + P_1 \\ \dots \dots \dots \\ u_n = \bar{u}_n + P_n, \end{array} \right. \tag{5.}$$

wo $(P_1, \dots P_n)$ ein Periodensystem der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ ist, sodass

$$\varphi(u_1, \dots u_n) = \varphi(\bar{u}_1, \dots \bar{u}_n). \tag{6.}$$

Jede der Grössen $\xi'_\varkappa$ ist nun $\geqq \xi_\varkappa^0$, aber $< \xi_\varkappa^0 + 1$; die Gesammtheit der Werthsysteme $(\bar{u}_1, \dots \bar{u}_n)$ bildet also einen begrenzten, ganz im Endlichen

*) S. die Abhandlung: „Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen." [Bd. II. S. 55 dieser Ausgabe.]

liegenden Bereich, der mit $\overline{U}$ bezeichnet werden möge. Die vorstehende Gleichung besagt also, dass die Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ jeden Werth, den sie überhaupt annehmen kann, auch für ein dem Bereich $\overline{U}$ angehöriges Werthsystem der Argumente $u_1, \dots u_n$ erhält.

Hieraus ergiebt sich unter anderm, dass es nicht möglich ist, $\varphi(u_1, \dots u_n)$ in der Form einer beständig convergirenden Potenzreihe von $u_1, \dots u_n$ darzustellen. Denn dazu wäre erforderlich, dass jeder Werth, den $\varphi(u_1, \dots u_n)$ innerhalb des Bereichs $\overline{U}$ annehmen könnte, seinem absoluten Betrage nach unterhalb einer angebbaren Grenze läge; daraus aber würde folgen, dass $\varphi(u_1, \dots u_n)$ überhaupt nicht beliebig gross werden könnte, was doch eine nothwendige Eigenschaft jeder in der in Rede stehenden Form darstellbaren Function ist. Es giebt daher im Gebiete der Grössen $u_1, \dots u_n$ jedenfalls Stellen $(a_1, \dots a_n)$, für die von den drei unter 1. angeführten Fällen der zweite oder der dritte eintritt, sodass auch stets bestimmte Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ existiren, für welche $\varphi(u_1, \dots u_n) = \infty$ wird. Da nun, wenn b ein beliebiger Werth ist, $\frac{1}{\varphi(u_1, \dots u_n) - b}$ dieselben Perioden-Systeme wie $\varphi(u_1, \dots u_n)$ besitzt, so ergiebt sich weiter, dass auch diese Function unendlich gross werden, also $\varphi(u_1, \dots u_n)$ jeden beliebigen Werth erhalten kann, und zwar an Stellen, die nicht Grenzstellen sind.

Nachdem dies zur genauen Charakteristik der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ Erforderliche vorausgeschickt worden, gehe ich nunmehr zum Beweise des in der Einleitung angeführten Satzes über, dass mit jeder solchen Function ein System Abelscher Integrale erster Gattung dergestalt in Verbindung steht, dass je n zusammengehörige Perioden dieser Integrale auch ein Perioden-System der betrachteten Function bilden. Dieser Beweis, dessen Gang bereits in der S. 66 angegebenen Abhandlung angedeutet worden ist, soll hier in etwas veränderter Weise durchgeführt werden.

§ 2.

Aus der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ lassen sich auf mannigfaltige Weise n andere

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \quad \dots \quad \varphi_n(u_1, \dots u_n),$$

von denen jede denselben analytischen Charakter und dieselben Periodensysteme wie jene besitzt, so ableiten, dass sie an der Stelle $(0, \dots 0)$ sämmt-

lich verschwinden, die Functional-Determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{array} \right|$$

aber an derselben Stelle einen von Null verschiedenen Werth erhält.

Es kann dies z. B. folgendermassen geschehen.

Man nehme n Systeme von je n Constanten

$$(v_1', \dots v_n'), \quad \dots \quad (v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$$

so an, dass $\varphi(v_1', \dots v_n'), \dots \varphi(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$ sämmtlich bestimmte endliche Werthe haben, und dass die Determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi(u_1 + v_1', \dots u_n + v_n')}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi(u_1 + v_1', \dots u_n + v_n')}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi(u_1 + v_1^{(n)}, \dots u_n + v_n^{(n)})}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi(u_1 + v_1^{(n)}, \dots u_n + v_n^{(n)})}{\partial u_n} \end{array} \right|,$$

welche mit $D(u_1, \dots u_n)$ bezeichnet werde, nicht gleich Null wird, wenn $u_1, \dots u_n$ sämmtlich verschwinden.*) Setzt man dann

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(u_1, \dots u_n) = \varphi(u_1 + v_1', \dots u_n + v_n') - \varphi(v_1', \dots v_n') \\ \dots \\ \varphi_n(u_1, \dots u_n) = \varphi(u_1 + v_1^{(n)}, \dots u_n + v_n^{(n)}) - \varphi(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}), \end{array} \right.$$

---

*) Dass das Letztere stets möglich ist, lässt sich so zeigen. Wäre $D(0, \dots 0) = 0$ bei beliebigen Werthen der Grössen $(v_1', \dots v_n'), \dots (v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)})$, so hätte man,

$$\frac{\partial \varphi(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\alpha} \quad \text{mit} \quad \overset{\alpha}{\varphi}(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnend,

$$\left| \begin{array}{ccc} \overset{1}{\varphi}(v_1', \dots v_n'), & \dots & \overset{n}{\varphi}(v_1', \dots v_n') \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{1}{\varphi}(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}), & \dots & \overset{n}{\varphi}(v_1^{(n)}, \dots v_n^{(n)}) \end{array} \right| = 0,$$

und es existirte also eine Gleichung von der Form

$$C_1 \overset{1}{\varphi}(v_1', \dots v_n') \cdots + C_n \overset{n}{\varphi}(v_1', \dots v_n') = 0,$$

in der die $C_1, \dots C_n$ von den $v_1', \dots v_n'$ unabhängig, aber nicht sämmtlich gleich Null wären. Diese

so ist

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

ein Functionensystem von der angegebenen Beschaffenheit.

Sodann nehme man zwischen $u_1, \dots u_n$ und einer neuen Veränderlichen (x) die nachstehenden Gleichungen an, in denen $F_1(x), \dots F_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, welche sämmtlich für $x = 0$ verschwinden, im Übrigen aber — abgesehen von einer sogleich anzugebenden Beschränkung — beliebig gewählt werden können:

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(u_1, \dots u_n) = F_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(u_1, \dots u_n) = F_n(x). \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen lassen sich für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag unter einer bestimmten Grenze liegt, befriedigen, indem man

$$(3.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{1,\nu} x^\nu = \psi_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{n,\nu} x^\nu = \psi_n(x) \end{array} \right.$$

setzt, wo die $k_{\alpha,\nu}$ Constanten bezeichnen, welche mittels der Gleichungen (2.) eindeutig bestimmt werden.

Unter den gemachten Voraussetzungen können nämlich

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

für alle Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, die einem bestimmten, die Stelle $(0, \dots 0)$ umgebenden Bereich angehören, als ganze Functionen $G_1(u_1, \dots u_n), \dots G_n(u_1, \dots u_n)$ dargestellt werden. Bezeichnet man mit $G_\alpha^{(1)}(u_1, \dots u_n)$ die Summe der Glieder erster Ordnung in $G_\alpha(u_1, \dots u_n)$, so ist die Determinante der Functionen

$$G_1^{(1)}(u_1, \dots u_n), \dots G_n^{(1)}(u_1, \dots u_n)$$

nicht gleich Null, und man hat daher

$$(4.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{1,\beta} G_\beta^{(1)}(u_1, \dots u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \sum_{\beta=1}^{n} c_{n,\beta} G_\beta^{(1)}(u_1, \dots u_n), \end{array} \right.$$

wo die $c_{\alpha,\beta}$ Constanten bezeichnen.

Gleichung würde dann besagen, dass $\varphi(v_1', \dots v_n')$ als Function von weniger als n Argumenten, und zwar so, dass diese lineare Functionen von $v_1', \dots v_n'$ sein würden, ausgedrückt werden könnte — was gegen die Annahme ist.

Setzt man also

$$(5.)\quad \begin{cases} \overline{G}_\alpha(u_1, \dots u_n) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha,\beta}(\dot{G}_\alpha^{(1)}(u_1, \dots u_n) - G_\alpha(u_1, \dots u_n)) \\ \overline{F}_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha,\beta} F_\beta(x), \end{cases}$$

so gestalten sich die Gleichungen (2.) für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ um in die folgenden:

$$(6.)\quad \begin{cases} u_1 = \overline{F}_1(x) + \overline{G}_1(u_1, \dots u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n = \overline{F}_n(x) + \overline{G}_n(u_1, \dots u_n), \end{cases}$$

in denen die Ausdrücke $\overline{G}_1, \dots \overline{G}_n$ nur Glieder zweiter und höherer Ordnung enthalten.

Aus diesen Gleichungen erhält man dann

$$(7.)\qquad k_{\alpha,1} = [\overline{F}_\alpha(x)]_x$$

und (für $\mu > 1$)

$$(8.)\qquad k_{\alpha,\mu} = [\overline{F}_\alpha(x)]_{x^\mu} + \left[\overline{G}_\alpha\left(\sum_{\nu=1}^{\mu-1} k_{1,\nu} x^\nu, \dots \sum_{\nu=1}^{\mu-1} k_{n,\nu} x^\nu\right)\right]_{x^\mu},$$

durch welche Formeln sämmtliche $k_{\alpha,\nu}$ gegeben werden. Hierbei ist noch Folgendes zu bemerken. Man hat (gemäss Gleichung (5.))

$$(9.)\quad \begin{cases} F_1(x) = G_1^{(1)}(\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_n(x) = G_n^{(1)}(\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)), \end{cases}$$

und kann daher statt $F_1(x), \dots F_n(x)$ auch die Functionen $\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)$ willkürlich — doch so, dass sie für $x = 0$ sämmtlich verschwinden — annehmen. Die Formeln (7.), (8.) lehren nun, dass es möglich ist, $\overline{F}_1(x), \dots \overline{F}_n(x)$ und somit auch $F_1(x), \dots F_n(x)$ als ganze Functionen n^{ten} Grades so zu bestimmen, dass jeder der Coefficienten

$$\begin{matrix} k_{1,1}, & \dots & k_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ k_{n,1}, & \dots & k_{n,n} \end{matrix}$$

einen vorgeschriebenen Werth erhält. Daraus folgt, dass unter den Coefficienten von $F_1(x), \dots F_n(x)$ eine bestimmte Relation bestehen muss, wenn die

Determinante

$$\begin{vmatrix} k_{1,1}, & \dots & k_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n,1}, & \dots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

gleich Null sein soll. Man darf daher im Folgenden voraussetzen, es seien $F_1(x), \dots F_n(x)$ ganze Functionen n^{ten} Grades, welche — ausserdem dass jede von ihnen für $x = 0$ verschwindet — so gewählt sind, dass erstens unter ihnen keine lineare Abhängigkeit besteht, und zweitens die vorstehende Determinante nicht gleich Null ist. Eine Folge der letzteren Bedingung ist dann, dass der Ausdruck

$$c_1\psi_1(x) + \dots + c_n\psi_n(x),$$

wenn $c_1, \dots c_n$ von x unabhängige Grössen und nicht sämmtlich gleich Null sind, niemals für jeden Werth von x verschwindet, d. h. dass auch unter den Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ keine lineare Abhängigkeit besteht.

Aus diesen zunächst für einen beschränkten Bereich der Veränderlichen x definirten Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ entspringt nun den Principien der Functionen-Theorie gemäss ein bestimmtes System analytischer Functionen, von dem sich zeigen lässt, dass es ein System Abelscher Integrale von der vorhin angegebenen Beschaffenheit ist.

§ 3.

Um dieses nachzuweisen, ersetze ich zunächst das System der Gleichungen (2.) des vorigen § durch ein anderes ihm äquivalentes. Man kann bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Functionen $F_1(x), \dots F_n(x)$ ein System von n^2 Constanten $h_{\alpha,\beta}$ so bestimmen, dass man

(1.)
$$\left\{\begin{aligned} x^n &= \sum_{\beta=1}^{n} h_{1,\beta} F_\beta(x) \\ x^{n-1} &= \sum_{\beta=1}^{n} h_{2,\beta} F_\beta(x) \\ &\cdots\cdots \\ x &= \sum_{\beta=1}^{n} h_{n,\beta} F_\beta(x) \end{aligned}\right.$$

hat. Setzt man dann

(2.)
$$\mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) = \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha,\beta}\varphi_\beta(u_1, \dots u_n), \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so ergeben sich aus den genannten Gleichungen die folgenden:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}_1(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^n(u_1, \dots u_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{F}_{n-1}(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^2(u_1, \dots u_n) = 0, \end{array}\right.$$

$$(4.)\qquad x = \mathfrak{F}_n(u_1, \dots u_n).$$

Umgekehrt erhält man aus diesen

$$\mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) = x^{n-\alpha+1} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und daher (gemäss (1.), (2.))

$$\sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha,\beta}(F_\beta(x) - \varphi_\beta(u_1, \dots u_n)) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und somit

$$F_\beta(x) - \varphi_\beta(u_1, \dots u_n) = 0, \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

da

$$\begin{vmatrix} h_{1,1}, & \dots & h_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ h_{n,1}, & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist. Das System der n Gleichungen (3.), (4.) ist also dem ursprünglichen ((2.), § 2) äquivalent.

Aus dem Grössengebiet $(u_1, \dots u_n)$ denke man sich nun zunächst alle diejenigen Stellen ausgeschieden, an welchen eine der Functionen

$$\varphi_1(u_1, \dots u_n), \ \dots \ \varphi_n(u_1, \dots u_n)$$

keinen bestimmten oder einen unendlich grossen Werth hat; aus den übrigen ferner die, an denen die oben mit $D(u_1, \dots u_n)$ bezeichnete Functional-Determinante verschwindet, und betrachte von den alsdann noch bleibenden alle diejenigen, welche die Gleichungen (3.) befriedigen. Die Gesammtheit dieser Stellen möge mit $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ bezeichnet werden. Ihr adjungire man von den ausgeschiedenen Stellen wieder diejenigen, denen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ unendlich nahe liegen; das aus $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ und den hinzugefügten Stellen bestehende Gebilde möge dann das durch die Gleichungen (3.) definirte heissen und mit $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ bezeichnet werden.

In den Gleichungen (3.) des § 2 kann man die Veränderliche x durch Festsetzung einer oberen Grenze für ihren absoluten Betrag so beschränken, dass die durch diese Gleichungen definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ sämmt-

lich dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der dort mit

$$G_1(u_1, \dots u_n), \dots G_n(u_1, \dots u_n)$$

bezeichneten Entwickelungen von $\varphi_1(u_1, \dots u_n), \dots \varphi_n(u_1, \dots u_n)$ angehören, mithin für keins von ihnen eine dieser Functionen unendlich gross oder unbestimmt wird. Dann gehören diese Werthsysteme sämmtlich dem Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ an; denn sie befriedigen die Gleichungen (3.), und es kann $D(u_1, \dots u_n)$ nur für einzelne von ihnen verschwinden, denen dann aber andere, für welche dies nicht der Fall ist, unendlich nahe liegen. Dies genügt, um vorläufig zu zeigen, dass es im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$ ein Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, wie es definirt worden, wirklich giebt.

Jetzt ist Folgendes zu beweisen.

Es sei $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$, so lassen sich stets ganze Functionen (Potenzreihen) einer Veränderlichen t

$$\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t),$$

welche für $t = 0$ sämmtlich verschwinden, so bestimmen, dass die durch die Gleichungen

$$(5.) \qquad \begin{cases} u_1 = a_1 + \mathfrak{F}_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_n = a_n + \mathfrak{F}_n(t) \end{cases}$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ sämmtlich ebenfalls zu dem in Rede stehenden Gebilde gehören; und zwar kann dies so geschehen, dass verschiedenen Werthen von t auch stets verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ entsprechen. Wenn es sich ferner darum handelt, alle Stellen des Gebildes darzustellen, für welche die absoluten Beträge der Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ sämmtlich unter einer vorgeschriebenen Grenze δ liegen, so reicht für diesen Zweck, wenn man nur δ hinlänglich klein annimmt, in jedem Falle eine beschränkte Anzahl solcher Gleichungssysteme aus, und insbesondere ein einziges, wenn $(a_1, \dots a_n)$ dem Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ angehört.

Es werde

$$\mathfrak{F}_\alpha(u_1, \dots u_n) - \mathfrak{F}_n^{n-\alpha+1}(u_1, \dots u_n) \text{ mit } F_\alpha(u_1, \dots u_n), \qquad (\alpha = 1, \dots n-1)$$

$$\mathfrak{F}_n(u_1, \dots u_n) \text{ mit } F_n(u_1, \dots u_n)$$

bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial F_\alpha(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{F}_\alpha}{\partial u_\beta} - (n - \alpha + 1)\, \mathfrak{F}_n^{n-\alpha} \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n-1)$$

und daher

$$(6.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = h \,.\, D(u_1, \ldots u_n),$$

wo

$$h = \begin{vmatrix} h_{11}, & \ldots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1}, & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wenn daher $(a_1, \ldots a_n)$ dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehört, welcher Fall zuerst betrachtet werde, so kann man n Constanten $c_1, \ldots c_n$ so wählen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

an der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ nicht gleich Null ist, da sie der Gleichung (6.) zufolge nicht bei beliebigen Werthen von $c_1, \ldots c_n$ verschwindet. Fügt man daher den Gleichungen

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_1(u_1, \ldots u_n) = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ F_{n-1}(u_1, \ldots u_n) = 0 \end{cases}$$

noch die folgende hinzu:

$$(8.)\qquad c_1(u_1 - a_1) + \cdots + c_n(u_n - a_n) = t;$$

so kann man, da sich $F_1(u_1, \ldots u_n), \ldots F_{n-1}(u_1, \ldots u_n)$ für hinlänglich kleine Werthe von $(u_1 - a_1), \ldots (u_n - a_n)$ als ganze Functionen dieser Grössen darstellen lassen, nach einem bekannten Satze alle in einer bestimmten Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ liegenden und die Gleichungen (3.) befriedigenden Werthsysteme $(u_1, \ldots u_n)$ in der unter (5.) angegebenen Form darstellen, und zugleich δ so klein annehmen, dass dieselben sämmtlich dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehören.

Wenn ferner $(a_1, \dots a_n)$ eine der dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ in der vorhin angegebenen Weise adjungirten Stellen ist, so lässt sich, wenn man

$$u_1 = a_1 + v_1, \quad \dots \quad u_n = a_n + v_n$$

setzt, jede der Functionen $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ auf die Form

$$\frac{G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)}$$

in der Art bringen, dass Zähler und Nenner dieses Bruches nicht einen an der Stelle $(v_1, \dots v_n) = (0, \dots 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form besitzen. Ist dann (bei einem bestimmten Werthe von α) $\overline{G}_\alpha(0, \dots 0)$ nicht gleich Null, so ist unmittelbar klar, dass an allen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in einer gewissen Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, $G_\alpha(v_1, \dots v_n) = 0$ sein muss. Da es nun in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ der Annahme nach solche Stellen giebt, so folgt, dass $G_\alpha(0, \dots 0) = 0$ ist. Ist aber $\overline{G}_\alpha(0, \dots 0) = 0$, so ergiebt sich aus dem in § 1 (Anmerkungen) Gesagten, dass bei hinlänglich kleinem Werthe von δ alle Stellen, an denen $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ verschwindet, zu denjenigen singulären gehören, an welchen $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ unendlich gross oder unbestimmt ist. Diese sind vom Gebilde $\mathfrak{G}'$ ausgeschlossen; es muss also an den diesem Gebilde und der betrachteten Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ angehörenden Stellen $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ verschwinden; und da es solche Stellen unendlich nahe bei $(a_1, \dots a_n)$ wirklich giebt, so ist auch $G_\alpha(0, \dots 0) = 0$.

Man kann also δ so klein annehmen, dass an allen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in der Umgebung (δ) der betrachteten Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, die $(n-1)$ Gleichungen

$$(9.) \qquad G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n) = 0$$

bestehen. Aber es lässt sich nicht umgekehrt behaupten, dass jede Stelle, für welche diese Gleichungen befriedigt werden, zu $\mathfrak{G}'$ gehöre. Nun kann aber, wie in den Elementen der Functionen-Theorie gezeigt wird, wenn irgend ein System von Gleichungen wie die vorstehenden, in denen

$$G_1(v_1, \dots v_n), \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

ganze, an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindende Functionen von $v_1, \dots v_n$ sind,

gegeben ist, dasselbe durch eine gewisse Anzahl anderer Systeme

$$(10.)\quad \begin{cases} G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = w_{m+1}^{\mu} + G^{(1)}(w_1, \dots w_m) w_{m+1}^{\mu-1} + \cdots + G^{(\mu)}(w_1, \dots w_m) = 0 \\ G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) . w_{m+\nu} = \bar{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1}), \qquad (\nu = 2, \dots n-m) \end{cases}$$

wo $w_1, \dots w_n$ homogene und von einander unabhängige lineare Functionen der Grössen $v_1, \dots v_n$ bedeuten und

$$G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = \frac{\partial G(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{\partial w_{m+1}}$$

ist, in der Art ersetzt werden, dass nicht nur jedes den ursprünglichen Gleichungen genügende Werthsystem $(v_1, \dots v_n)$, in welchem jede der Grössen v ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt, auch einem der neuen Gleichungssysteme genügt, und zwar, ohne dass in demselben $G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$ ist, sondern dies auch umgekehrt gilt. In Betreff der Anzahl der Gleichungssysteme, welche das ursprüngliche vertreten, so wie über die Grösse der Zahl m in jedem derselben lässt sich, so lange man von den Functionen $G_1(v_1, \dots v_n), \dots G_n(v_1, \dots v_n)$ nichts Weiteres weiss als dass sie die angegebene Form haben, durchaus nichts Näheres feststellen. Es unterscheiden sich aber diejenigen Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$, welche durch ein Gleichungssystem (10.), in dem $m > 1$ ist, geliefert werden, von den übrigen dadurch, dass für die erstern die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

bei willkürlichen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Es sei nämlich $(v_1', \dots v_n')$ irgend eins der in Rede stehenden Werthsysteme, so setze man in denjenigen Gleichungen von der Form (10.), durch welche dasselbe geliefert wird,

$$v_1' + k_1, \dots v_n' + k_n \quad \text{für} \quad v_1, \dots v_n,$$

so erhält man $(n-m)$ Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{G}_\beta(k_1, \dots k_n) = 0 \qquad (\beta = 1, \dots n-m).$$

Fügt man denselben noch die folgende hinzu:

$$c_1 k_1 + \cdots + c_n k_n = 0,$$

und bezeichnet mit $w_1', \dots w_n'$ die Werthe von $w_1, \dots w_n$ an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$, mit $w_1'+h_1, \dots w_n'+h_n$ die Werthe derselben Grössen an der Stelle $(v_1'+k_1, \dots v_n'+k_n)$, so kann man, da $\mathfrak{G}_\beta(0, \dots 0) = 0$ ist, in jedem Falle, wo $m > 1$, Werthsysteme $(k_1, \dots k_n)$, in welchen die absoluten Beträge der einzelnen Grössen unter einer beliebig klein anzunehmenden Grenze liegen, ohne dass sie doch alle gleich Null sind, so bestimmen, dass die $(n-m+1)$ angegebenen Gleichungen befriedigt werden, aber $G'(w_1'+h_1, \dots w_n'+h_n)$ nicht gleich Null ist, da der Annahme nach $G'(w_1', \dots w_n')$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Dann werden auch die Gleichungen (9.) befriedigt, wenn man

$$v_1 = v_1'+k_1, \quad \dots \quad v_n = v_n'+k_n$$

setzt. Es lässt sich aber

$$G_\alpha(v_1'+k_1, \dots v_n'+k_n) \text{ auf die Form } G_\alpha^{(1)}k_1+\dots+G_\alpha^{(n)}k_n$$

in der Art bringen, dass $G_\alpha^{(\beta)}$, wenn $k_1, \dots k_n$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden, gleich dem Werthe von $\frac{\partial G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\partial v_\beta}$ an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$ wird. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} G_\alpha^{(1)}k_1+\dots+G_\alpha^{(n)}k_n &= 0, \qquad (\alpha = 1, \dots n-1) \\ c_1k_1+\dots+c_nk_n &= 0 \end{aligned}$$

folgt dann, indem $k_1, \dots k_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind,

$$\begin{vmatrix} G_1^{(1)}, & \dots & G_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n-1}^{(1)}, & \dots & G_{n-1}^{(n)} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix} = 0.$$

Da es nun bei willkürlich angenommenen Werthen von $c_1, \dots c_n$ Werthsysteme $(k_1, \dots k_n)$ giebt, in denen jede einzelne Grösse beliebig klein ist, so folgt, dass auch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix} = 0$$

sein muss an der Stelle $(v_1', \dots v_n')$; wie behauptet worden.

Für diejenigen Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$ aber, welche die obigen Gleichungen (9.) befriedigen und zugleich, wenn man

$$u_1 = a_1 + v_1, \quad \dots \quad u_n = a_n + v_n$$

setzt, Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ liefern, ist die vorstehende Determinante nicht gleich Null. Denn man hat

$$\frac{\partial F_\alpha(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\beta} = \frac{1}{\overline{G}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial v_\beta} - \frac{G_\alpha}{\overline{G}_\alpha^2} \frac{\partial \overline{G}_\alpha}{\partial v_\beta},$$

also für die genannten Werthsysteme, für die $\overline{G}_\alpha$ nicht verschwindet,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\beta} = \frac{1}{\overline{G}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial u_\beta},$$

so dass die fragliche Determinante gleich ist dem Producte aus $\overline{G}_1 \overline{G}_2 \dots \overline{G}_{n-1}$ und der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix},$$

von welcher gezeigt worden ist, dass sie an keiner Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'$ bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet.

Da nun in jeder Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ sich Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ finden, so ist aus dem Vorstehenden der Schluss zu ziehen, dass unter den Gleichungssystemen (10.), welche die Gleichungen (9.) ersetzen, eine gewisse Anzahl solcher, in denen $m = 1$ ist, und welche also die Form

$$(11.) \qquad \begin{cases} G(w_1, w_2) = w_2^\mu + G^{(1)}(w_1) w_2^{\mu-1} + \dots + G^{(\mu)}(w_1) = 0^*) \\ G'(w_1, w_2) w_{2+\nu} = \overline{G}(w_1, w_2) \qquad (\nu = 1, \dots n-2) \end{cases}$$

haben, bei hinlänglich klein angenommenem Werthe von δ sämmtliche Stellen $(u_1, \dots u_n)$, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehören und zugleich in der Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, liefern.

---

*) Die Functionen $G^{(1)}(w_1), \dots G^{(\mu)}(w_1)$ verschwinden sämmtlich für $w_1 = 0$.

Nun lässt sich — für jede einzelne Gleichung $G(w_1, w_2) = 0$ — eine beschränkte Anzahl von Functionenpaaren

$$g_1(t) = k_1 t + k_2 t^2 + \cdots, \quad g_2(t) = l_1 t + l_2 t^2 + \cdots,$$

wo t eine neue Veränderliche bedeutet, so bestimmen, dass durch die Gleichungen

$$w_1 = g_1(t), \quad w_2 = g_2(t),$$

wenn man alle diese Functionenpaare anwendet, und der Grösse t jeden Werth beilegt, der dem absoluten Betrage nach eine bestimmte Grenze (τ) nicht überschreitet, sämmtliche der Gleichung $G(w_1, w_2) = 0$ genügenden Werthepaare (w_1, w_2) gegeben werden, unter der Bedingung, dass für den absoluten Betrag von w_1 sowohl als w_2 eine hinlänglich kleine obere Grenze (δ') festgesetzt werde. Zugleich kann man τ, δ' so klein wählen, dass man jedes einzelne Werthsystem (w_1, w_2) nur durch ein Functionenpaar $(g_1(t), g_2(t))$ und durch einen Werth von t erhält. Man erhält dann ferner für $w_3, \ldots w_n$ durch die Gleichungen (11.) ähnliche Ausdrücke

$$w_3 = g_3(t), \quad \ldots \quad w_n = g_n(t),^*)$$

welche vollständig bestimmt sind, sobald man ein Functionenpaar $g_1(t), g_2(t)$, wenn überhaupt mehrere vorhanden sind, ausgewählt hat. Drückt man darauf $v_1, \ldots v_n$ durch $w_1, \ldots w_n$ aus, so ergiebt sich zur Darstellung sämmtlicher Werthsysteme $(v_1, \ldots v_n)$, welche den Gleichungen

$$G_1(v_1, \ldots v_n) = 0, \quad \ldots \quad G_{n-1}(v_1, \ldots v_n) = 0$$

unter der Bedingung genügen, dass für sie die Determinante Γ nicht stets verschwinde und für den absoluten Betrag einer jeden der Grössen v eine hinlänglich kleine Grenze (δ) festgesetzt werde, eine beschränkte Anzahl von Gleichungssystemen

$$(12.) \qquad v_1 = \mathfrak{F}_1(t), \quad \ldots \quad v_n = \mathfrak{F}_n(t),$$

wo $\mathfrak{F}_1(t), \ldots \mathfrak{F}_n(t)$ dieselbe Gestalt wie $g_1(t)$ haben.

*) Es sind die Gleichungen (11.) so beschaffen, dass man aus ihnen für jede der Grössen $w_{2+\nu}$ eine Gleichung zwischen w_1 und $w_{2+\nu}$ von derselben Form, wie die für w_2 aufgestellte erhält. Mithin muss $w_{2+\nu}$ nothwendig gleichzeitig mit t verschwinden, und es kommen in $g_{2+\nu}(t)$ nur positive Potenzen von t vor.

Unter den so definirten Werthsystemen $(v_1, \dots v_n)$ müssen nun sämmtliche, denen Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ entsprechen, enthalten sein. Es giebt also mindestens ein Functionen-System

$$\mathfrak{F}_1(t), \ \dots \ \mathfrak{F}_n(t)$$

von der Beschaffenheit, dass in keiner der Potenzreihen von t, in welche sich

$$\overline{G}_1(v_1, \dots v_n), \ \dots \ \overline{G}_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

durch die Substitution

$$v_1 = \mathfrak{F}_1(t), \ \dots \ v_n = \mathfrak{F}_n(t)$$

verwandeln, sämmtliche Coefficienten gleich Null werden. Denn träte dies für jedes System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ auch nur bei einer der Functionen $\overline{G}_\alpha$ ein, so würden von den jetzt betrachteten Werthsystemen $(u_1 = a_1 + v_1, \dots u_n = a_n + v_n)$ wenigstens alle diejenigen, bei denen der absolute Betrag von t eine gewisse Grenze nicht überschritte, nach dem bereits oben Bemerkten von dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ausgeschlossen sein, so dass es in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ gar keine diesem Gebilde angehörigen Stellen geben würde; was wider die Annahme ist. Für jedes Functionen-System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ von der angegebenen Beschaffenheit kann man nun durch Festsetzung einer oberen Grenze für den absoluten Betrag von t bewirken, dass jede der Functionen

$$\overline{G}_n(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$$

nur für $t = 0$ verschwindet. Folglich werden dann sämmtliche durch die Gleichungen

$$u_1 = a_1 + \mathfrak{F}_1(t), \ \dots \ u_n = a_n + \mathfrak{F}_n(t) \tag{13.}$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ die obigen Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) = 0, \ \dots \ F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

befriedigen.

Setzt man endlich die vorstehenden Ausdrücke von $(u_1, \dots u_n)$ in die Function $D(u_1, \dots u_n)$ ein, so lässt sich dieselbe in eine Potenzreihe von t verwandeln, deren Coefficienten wenigstens nicht für alle jetzt noch übrig gebliebenen Functionen-Systeme $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$ sämmtlich verschwinden

können; denn auch dies würde besagen, dass es in einer gewissen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ keine dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ angehörige Stelle $(u_1, \dots u_n)$ gäbe.

Für jedes System $(\mathfrak{F}_1(t), \dots \mathfrak{F}_n(t))$, bei welchem die in Rede stehende Entwickelung von $D(u_1, \dots u_n)$ nicht identisch verschwindet, lässt sich nunmehr die Grenze für den absoluten Betrag von t so klein machen, dass

$$D(a_1 + \mathfrak{F}_1(t), \dots a_n + \mathfrak{F}_n(t))$$

nur für $t = 0$ verschwindet oder unendlich gross wird; und es geben dann bei jedem jetzt zulässigen Werth von t die Gleichungen (11.) wirklich ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem $(u_1, \dots u_n)$.

Hiermit ist also bewiesen:

A) Es giebt, wenn $(a_1, \dots a_n)$ eine beliebige bestimmte Stelle des durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \dots u_n) \equiv 0, \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0$$

in der oben festgesetzten Weise definirten Gebildes $\mathfrak{G}(u_1, \dots u_n)$ ist, Systeme von je n ganzen Functionen einer Veränderlichen t

$$(\mathfrak{G}_1(t), \mathfrak{G}_2(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)),$$

von denen jedes einzelne für jeden von Null verschiedenen Werth von t, dessen absoluter Betrag unterhalb einer bestimmten oberen Grenze (τ) liegt, ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem $(u_1, \dots u_n)$ darstellt, und für $t = 0$ das System $(a_1, \dots a_n)$ selbst. Dabei sind $\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$ so beschaffen, dass verschiedenen Werthen von t stets auch verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ entsprechen, wenigstens, wenn die obere Grenze für den absoluten Betrag von t hinlänglich klein angenommen wird.

Ferner reicht man, um alle Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ zu erhalten, die in einer vorgeschriebenen Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, in jedem Falle mit einer beschränkten Anzahl solcher Functionen-Systeme $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ aus, wofern nur δ klein genug angenommen wird, und namentlich mit einen einzigen, wenn $(a_1, \dots a_n)$ selbst dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehört.

Zusatz. Für die durch ein Functionen-System $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ dargestellten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ lässt sich stets ein System von $(n-1)$

Gleichungen zwischen den Grössen

$$(u_1-a_1),\ \dots\ (u_n-a_n)$$

aufstellen, welches nur durch sie befriedigt wird.

Es sei gt^ν das Anfangsglied in der Entwickelung von $\mathfrak{G}_1(t)-a_1$, so erhält man aus der Gleichung $u_1-a_1=\mathfrak{G}_1(t)-a_1$ die Grösse t als Potenzreihe von $\left(\frac{u_1-a_1}{g}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ ausgedrückt; es gehören also ν verschiedene Werthe von t zu demselben Werthe von u_1, also auch ν verschiedene Werthsysteme von $(u_2,\dots u_n)$ zu demselben Werthe von u_1. Sind nun $c_2,\dots c_n$ willkürliche Constanten, so lässt sich der Ausdruck

$$c_2(u_2-a_2)+\dots+c_n(u_n-a_n),$$

der mit w bezeichnet werde, ebenfalls nach Potenzen von $\left(\frac{u_1-a_1}{g}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ entwickeln und zwar so, dass die Coefficienten dieser Entwickelung linear aus $c_2,\dots c_n$ und rational aus den Coefficienten der Reihen

$$(\mathfrak{G}_1(t)-a_1),\ \dots\ (\mathfrak{G}_n(t)-a_n)$$

zusammengesetzt werden. Man kann dann ferner die Grössen $c_2,\dots c_n$ so wählen, dass unter den ν Werthen von w, die zu demselben Werthe von u_1 gehören, keine zwei gleiche sich finden.

Dieses vorausgesetzt, bezeichne man nun die ν Werthsysteme $(u_2,\dots u_n)$, die zu einem und demselben (unbestimmten) Werthe von u_1 gehören, mit

$$\begin{matrix} u_2^{(1)},\ \dots\ u_n^{(1)} \\ \dots\dots \\ u_2^{(\nu)},\ \dots\ u_n^{(\nu)} \end{matrix}$$

und bilde, unter $s, s_2,\dots s_n$ willkürliche, von u_1 unabhängige Grössen verstehend, das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{\nu}(s-s_2(u_2^{(\lambda)}-a_2)-s_3(u_3^{(\lambda)}-a_3)\cdots-s_n(u_n^{(\lambda)}-a_n)).$$

Dasselbe ist eine homogene ganze Function von $s, s_2,\dots s_n$, deren Coefficienten

Potenzreihen von $(u_1 - a_1)$ sind, und die mit $G(u_1 - a_1, s, s_2, \dots s_n)$ bezeichnet werden möge. Dann werden die ν Werthe von w durch die Gleichung

$$G(u_1 - a_1, w, c_2, \dots c_n) = 0$$

geliefert. Bezeichnet man ferner, unter der Voraussetzung dass $n > 2$,

$$\frac{\partial G(u_1 - a_1, s, s_2, \dots s_n)}{\partial s} \quad \text{mit} \quad G'(u_1 - a_1, s, s_2, \dots s_n),$$

$$\frac{\partial G(u_1 - a_1, s, s_2, \dots s_n)}{\partial s_\mu} \quad \text{mit} \quad G^{(\mu)}(u_1 - a_1, s, s_2, \dots s_n), \qquad (\mu = 2, \dots n)$$

so ergiebt sich

$$G'(u_1 - a_1, w, c_2, \dots c_n).(u_\mu - a_\mu) = -G^{(\mu)}(u_1 - a_1, w, c_2, \dots c_n), \quad (\mu = 2, \dots n)$$

welche Gleichungen für jeden der ν Werthe von w das zugehörige Werthsystem $(u_2, \dots u_n)$ liefern. Den Bruch

$$-\frac{G^{(\mu)}(u_1 - a_1, w, c_2, \dots c_n)}{G'(u_1 - a_1, w, c_2, \dots c_n)}$$

kann man mit Hülfe der Gleichung für w auf die Form

$$\frac{G_\mu(u_1 - a_1, w)}{(u_1 - a_1)^{m_\mu}}$$

bringen, wo G_μ eine ganze Function $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades von w, deren Coefficienten gewöhnliche Potenzreihen von $u_1 - a_1$ sind, m_μ aber eine ganze Zahl bezeichnet.

Hiernach ergiebt sich also, wenn $n = 2$ ist, eine Gleichung

$$G(u_1 - a_1, u_2 - a_2) = 0,$$

die in Beziehung auf $u_2 - a_2$ vom ν^{ten} Grade ist, zwischen u_1, u_2 von der Beschaffenheit, dass dieselbe nicht nur befriedigt wird, wenn man

$$u_1 = \mathfrak{G}_1(t), \quad u_2 = \mathfrak{G}_2(t)$$

setzt — unter der Bedingung, dass der absolute Betrag von t unter einer gewissen Grenze bleibe —, sondern dass auch alle derselben genügenden Werthsysteme (u_1, u_2), bei denen die absoluten Beträge von $u_1 - a_1, u_2 - a_2$ unter

einer gewissen Grenze δ liegen, durch das Functionen-Paar $(\mathfrak{G}_1(t), \mathfrak{G}_2(t))$ geliefert werden.

Ist $n > 2$, so nehme man ausser w noch $(n-2)$ andere homogene lineare Functionen $w', \dots w^{(n-2)}$ von $(u_2 - a_2), \dots (u_n - a_n)$ so an, dass die letzteren Grössen durch $w, w', \dots w^{(n-2)}$ ausgedrückt werden können, so erhält man ein System von $(n-1)$ Gleichungen

$$\begin{gathered} w^\nu + G_1(u_1 | a_1).w^{\nu-1} + \cdots + G_\nu(u_1 | a_1) = 0, \\ (u_1 - a_1)^{m_1} w' - G_{1,1}(u_1 | a_1).w^{\nu-1} - \cdots - G_{1,\nu}(u_1 | a_1) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (u_1 - a_1)^{m_{n-2}} w^{(n-2)} - G_{n-2,1}(u_1 | a_1).w^{\nu-1} - \cdots - G_{n-2,\nu}(u_1 | a_1) = 0, \end{gathered}$$

von der Beschaffenheit, dass das Functionen-System

$$\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$$

sämmtliche dieselben befriedigenden Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ liefert — unter der Voraussetzung, dass die absoluten Beträge von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ unter einer gewissen Grenze bleiben.

Aus dem Satz A) lässt sich noch eine wichtige Folgerung ziehen.

Angenommen nämlich, es seien für eine bestimmte Stelle $(a_1, \dots a_n)$ sämmtliche zur Darstellung der ihr benachbarten Stellen erforderlichen und hinreichenden Functionen-Systeme $(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$ gegeben. Für jedes derselben hat der absolute Betrag von t eine obere Grenze τ; es sei τ_0 eine positive Grösse, die kleiner ist als die kleinste dieser Grössen τ, und es werde δ so klein gewählt, dass man alle in der Umgebung (δ) von $(a_1, \dots a_n)$ liegenden Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ erhält, wenn man t jeden Werth, dessen absoluter Betrag die Grenze τ_0 nicht überschreitet, giebt. Man nehme ferner in der genannten Umgebung eine bestimmte, von $(a_1, \dots a_n)$ verschiedene Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ willkürlich an, setze

$$t = p + qi,$$

unter p, q reelle, der Bedingung

$$p^2 + q^2 \overline{\overline{<}} \tau_0^2$$

genügende Grössen verstehend, und betrachte für jedes einzelne Functionen-

System die Summe aus den Quadraten der absoluten Beträge der Differenzen

$$(\mathfrak{G}_1(p+qi)-a_1'), \ \ldots \ (\mathfrak{G}_n(p+qi)-a_n').$$

Diese ist eine stetige Function von p, q, und hat also nicht nur eine untere Grenze (ε^2), die $\geqq 0$ ist, sondern es giebt auch unter den Grössenpaaren (p, q) mindestens eins (p_0, q_0), für welches diese Grenze wirklich erreicht wird. Ist dieselbe gleich Null, so sind auch

$$(\mathfrak{G}_1(p_0+q_0 i)-a_1'), \ \ldots \ (\mathfrak{G}_n(p_0+q_0 i)-a_n')$$

sämmtlich gleich Null; es gehört also $(a_1', \ldots a_n')$ dem durch das betrachtete Functionen-System dargestellten Zweige des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ an. Ist aber ε von Null verschieden, so ist für jede Stelle dieses Zweiges wenigstens eine der Differenzen

$$u_1-a_1', \ \ldots \ u_n-a_n'$$

dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Man kann also eine Umgebung der Stelle $(a_1', \ldots a_n')$ angeben, welche zugleich in der Umgebung (δ) von $(a_1, \ldots a_n)$ liegt und keine dem genannten Zweige angehörige Stelle $(u_1, \ldots u_n)$ enthält. Daraus folgt sofort, dass in dem Falle, wo $(a_1', \ldots a_n')$ nicht zu dem in der Umgebung (δ) von $(a_1, \ldots a_n)$ enthaltenen Theile des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ gehört, in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1', \ldots a_n')$ sich überhaupt keine Stelle von $\mathfrak{G}'$ findet, also auch $(a_1', \ldots a_n')$ keine der diesem Gebilde adjungirten Stellen ist. Man hat also den Satz:

B) Ist $(a_1, \ldots a_n)$ eine beliebige Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$, so finden sich in einer bestimmten Umgebung von $(a_1, \ldots a_n)$ nur solche Stellen dieses Gebildes, die zu dem Gebilde $\mathfrak{G}'$ gehören.

C) Daraus folgt weiter, dass in einem ganz im Endlichen liegenden, im Übrigen beliebig weit ausgedehnten Theile des Grössengebiets $(u_1, \ldots u_n)$ nur eine endliche Anzahl von Stellen, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ in der oben festgesetzten Weise adjungirt sind, und die fortan die singulären Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ genannt werden sollen, vorhanden sein können.

Denn gäbe es unendlich viele, so würde mindestens eine bestimmte Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ existiren, welche die Eigenthümlichkeit hätte, dass in jeder Umgebung derselben singuläre Stellen von $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$, und somit auch Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ vorhanden wären. Dann gehörte aber

$(a_1, \dots a_n)$ selbst dem ersteren Gebilde an, was nach dem vorhergehenden Satze mit jener Eigenthümlichkeit nicht verträglich ist.

Hieran knüpfen sich noch folgende Bemerkungen.

Es geht aus dem gegebenen Beweise des Satzes A) hervor, dass man von einem Functionen-System

$$(\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t))$$

nur zu wissen braucht, dass es in jeder Umgebung der Stelle $(t = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth von t giebt, für den das System eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ darstellt, um sicher zu sein, dass es diese Eigenschaft für jeden von Null verschiedenen Werth von t, dessen absoluter Betrag unter einer bestimmten Grenze liegt, besitzt.*)

D) Daraus lässt sich weiter folgern, dass ein solches System für jeden Werth von t, der dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk (T) der Entwickelungen von $\mathfrak{G}_1(t), \dots \mathfrak{G}_n(t)$ angehört, eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ giebt.

Denn es sei t_0 irgend einer dieser Werthe von t, ϱ eine reelle und positive

---

*) Setzt man nämlich

$$a_1 = \mathfrak{G}_1(0), \quad \dots \quad a_n = \mathfrak{G}_n(0),$$
$$v_1 = \mathfrak{G}_1(t) - \mathfrak{G}_1(0), \quad \dots \quad v_n = \mathfrak{G}_n(t) - \mathfrak{G}_n(0)$$

und bringt, wie oben, $F_\alpha(u_1, \dots u_n)$ auf die Form

$$\frac{G_\alpha(v_1, \dots v_n)}{\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)},$$

so können unter der gemachten Voraussetzung in der Entwickelung von $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ nach Potenzen von t nicht alle Coefficienten gleich Null sein, dagegen müssen die Coefficienten der Entwickelung von $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ sämmtlich verschwinden. Man kann daher für den absoluten Betrag von t eine obere Grenze so feststellen, dass für jeden alsdann zulässigen von Null verschiedenen Werth von t jede der Functionen $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$, von den $\overline{G}_\alpha(v_1, \dots v_n)$ aber keine verschwindet, so dass also die Gleichungen

$$F_2(u_1, \dots u_n) = 0, \quad \dots \quad F_n(u_1, \dots u_n) = 0$$

alle befriedigt werden, wenn man

$$u_1 = \mathfrak{G}_1(t), \quad \dots \quad u_n = \mathfrak{G}_n(t)$$

setzt. In der Entwickelung von $D(a_1 + v_1, \dots a_n + v_n)$ nach Potenzen von t ferner können nicht alle Coefficienten den Werth Null haben; man kann also die obere Grenze für den absoluten Betrag von t auch so festsetzen, dass $D(a_1 + v_1, \dots a_n + v_n)$ nur für $t = 0$ verschwindet. Alsdann liefern die vorstehenden Gleichungen für jeden von Null verschiedenen Werth, den die Veränderliche t jetzt annehmen kann, eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$.

Veränderliche, so ist

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

stets ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem, wenn ϱ kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_0 angenommen wird. Für den Fall, dass $\varrho_0 < 1$, setze man

$$\varrho = \varrho_0 + \sigma,$$

so kann man $\mathfrak{G}_\alpha(\varrho_0 t_0 + \sigma t_0)$ als ganze Function von σ darstellen, die mit $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(\sigma)$ bezeichnet werden möge. Dann ist

$$(\overline{\mathfrak{G}}_1(\sigma), \dots \overline{\mathfrak{G}}_n(\sigma))$$

für jeden, seinem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegenden negativen Werth von σ ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges Werthsystem, und somit auch für jeden positiven Werth von σ bis zu einer bestimmten Grenze hin. Es ist also

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

auch für jeden Werth von ϱ, der grösser als ϱ_0 und kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_1 ist, ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ angehöriges und

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho_0 t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho_0 t_0))$$

ein demselben adjungirtes Werthsystem. Wenn nun auch $\varrho_1 < 1$, so lässt sich auf dieselbe Weise zeigen, dass

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \dots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

auch für jeden Werth von ϱ, der grösser als ϱ_1 und kleiner als eine bestimmte Grösse ϱ_2 ist, ein zu $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ gehöriges, und für $\varrho = \varrho_1$ ein demselben adjungirtes Werthsystem ist. So fortfahrend, wenn auch ϱ_2 noch < 1, zeigt man, dass es eine Reihe bestimmter positiver Werthe $(\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots)$ der Veränderlichen ϱ giebt, die so liegen, dass

$$\varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots,$$

und dass für jeden innerhalb eines der Intervalle

$$0 \dots \varrho_0, \quad \varrho_0 \dots \varrho_1, \quad \varrho_1 \dots \varrho_2, \quad \dots$$

enthaltenen Werth von ϱ

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \ldots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0))$$

ein dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ angehöriges, für $\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ aber ein demselben adjungirtes Werthsystem ist. Da aber t_0 innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Functionen $\mathfrak{G}_\alpha(t)$ angenommen ist, so sind alle Werthsysteme

$$(\mathfrak{G}_1(\varrho t_0), \ldots \mathfrak{G}_n(\varrho t_0)),$$

wenn ϱ zwischen 0 und 1 angenommen wird, in einem ganz im Endlichen liegenden Theile des Grössengebiets $(u_1, \ldots u_n)$ enthalten, und es giebt unter ihnen also nur eine endliche Anzahl solcher, die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \ldots u_n]$ adjungirt sind. Daher muss sich in der Reihe der Grössen $0, \varrho_0, \varrho_1, \ldots$ nothwendig eine finden, die $\geqq 1$, während die vorhergehende < 1 ist; und dann ist

$$(\mathfrak{G}_1(t_0), \ldots \mathfrak{G}_n(t_0))$$

in jedem Falle ein dem Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ angehöriges Werthsystem; womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

E) Aus jedem Functionen-System

$$(\mathfrak{G}_1(t), \ldots \mathfrak{G}_n(t))$$

von der im Satze A) angegebenen Beschaffenheit, von dem also jetzt feststeht, dass es für jeden Werth von t innerhalb T eins der durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \ldots u_n) = 0, \quad \ldots \quad F_{n-1}(u_1, \ldots u_n) = 0$$

definirten Werthsysteme $(u_1, \ldots u_n)$ liefert, lassen sich ferner unendlich viele, welche dieselbe Eigenschaft besitzen, in folgender Weise ableiten.

Man nehme in T einen bestimmten Werth (t_0) von t willkürlich an, setze $t = t_0 + t'$, und verwandle jede Function $\mathfrak{G}_\alpha(t_0 + t')$ in eine nach Potenzen von t' entwickelte $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$. Dann ist auch

$$(\overline{\mathfrak{G}}_1(t'), \ldots \overline{\mathfrak{G}}_n(t'))$$

ein Functionen-System, welches nach dem vorhergehenden Satze für jeden Werth von t' innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Functionen $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$ eine Stelle des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ darstellt, indem für alle die-

jenigen Werthe von t', für welche t_0+t' in T liegt,

$$\overline{\mathfrak{G}}_1(t') = \mathfrak{G}_1(t_0+t'), \quad \ldots \quad \overline{\mathfrak{G}}_n(t') = \mathfrak{G}_n(t_0+t')$$

ist. Substituirt man sodann für t' eine beliebige ganze Function einer neuen Veränderlichen t_1, mit der Bedingung, dass für $t_1 = 0$ diese Function verschwinde, ihre erste Ableitung aber nicht, und verwandelt $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha(t')$ in eine nach ganzen Potenzen von t_1 entwickelte Function $\overset{1}{\mathfrak{G}}_\alpha(t_1)$, so hat auch das Functionen-System

$$(\overset{1}{\mathfrak{G}}_1(t_1), \ldots \overset{1}{\mathfrak{G}}_n(t_1))$$

die Eigenschaft, dass es in derselben Weise wie das ursprüngliche einen Zweig (ein Element) des Gebildes $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ darstellt.

Aus dem so erhaltenen Functionen-System kann man dann in gleicher Weise ein neues

$$\overset{2}{\mathfrak{G}}_1(t_2), \ldots \overset{2}{\mathfrak{G}}_n(t_2)$$

von derselben Beschaffenheit ableiten, u. s. f.

Alle so sich ergebenden Functionen-Systeme stehen nun in einem solchen Zusammenhange, dass man aus jedem einzelnen, wenn man in der beschriebenen Weise verfährt, jedes andere erhalten kann; sie bilden deshalb ein in sich abgeschlossenes Ganzes, und die Gesammtheit der durch sie gelieferten Werthsysteme $(u_1, \ldots u_n)$ ist — nach dem von mir in den Vorlesungen gebrauchten Ausdrucke — ein monogenes Gebilde erster Stufe in dem Grössengebiet $[u_1, \ldots u_n]$.

Übrigens kann, so lange man von den Functionen $F_1(u_1, \ldots u_n), \ldots F_{n-1}(u_1, \ldots u_n)$ nichts anderes in Betracht zieht als dass sie den in § 1 unter (1.) angegebenen analytischen Charakter haben, nicht behauptet werden, dass das ganze durch die Gleichungen

$$F_1(u_1, \ldots u_n) = 0, \quad \ldots \quad F_{n-1}(u_1, \ldots u_n) = 0$$

definirte Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ ein monogenes Gebilde sei; es kann vielmehr dasselbe aus mehreren monogenen Gebilden, vielleicht aus unendlich vielen*) bestehen.

---

*) Für die hier betrachteten $2n$-fach periodischen Functionen $F_1, \ldots F_{n-1}$ kann gezeigt werden, dass $\mathfrak{G}[u_1, \ldots u_n]$ aus einer beschränkten Anzahl monogener Gebilde zusammengesetzt ist.

Die unter A) bis E) aufgestellten Sätze behalten nämlich ihre volle Gültigkeit, wenn man unter

$$F_1(u_1, \dots u_n), \quad \dots \quad F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$$

ein System von $(n-1)$ eindeutigen Functionen von dem in Rede stehenden analytischen Charakter versteht, und von denselben nur weiss, dass sie an irgend einer bestimmten Stelle sämmtlich verschwinden, während die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

an derselben Stelle nicht bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ gleich Null ist. Man hat dann das Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ in ganz ähnlicher Weise wie oben dadurch zu definiren, dass man aus der Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ zunächst diejenigen ausscheidet, welche für eine oder mehrere der Functionen F die Grenzstellen bilden — deren Gesammtheit man als die Grenzstellen des Functionen-Systems $F_1(u_1, \dots u_n), \dots F_{n-1}(u_1, \dots u_n)$ bezeichnen kann —, und dann von den übrigen nur diejenigen beibehält, für welche $F_1, \dots F_{n-1}$ sämmtlich den Werth Null haben, ohne dass zugleich die Determinante Γ bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Das so definirte Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ist dann ganz so wie oben zum Gebilde $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n]$ zu ergänzen. Das Letztere ist nur vollständig charakterisirt, wenn man sagt, dass es aus einem oder mehreren monogenen Gebilden erster Stufe bestehe. Es können aber leicht Beispiele dafür angegeben werden, dass die Anzahl dieser monogenen Gebilde auch unendlich gross sein kann.*)

Anmerkung. Die im Vorstehenden enthaltene ausführliche Erörterung, durch welche dargelegt wird, unter welchen Bedingungen und in welcher

*) Nimmt man z. B. $n = 3$, $F_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$, $F_2 = \sin(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)\pi$, wo die a, b Constanten bedeuten, so besteht $\mathfrak{G}[u_1, u_2, u_3]$ aus den unendlich vielen monogenen Gebilden, welche durch die Gleichungen

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \quad b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = m,$$

in denen m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, definirt werden.

Weise durch $(n-1)$ Gleichungen der betrachteten Art zwischen n Veränderlichen, von denen jede einzelne, für sich betrachtet, jeden beliebigen (complexen) Werth annehmen kann, ein analytisches Gebilde erster Stufe definirt wird, durfte hier nicht fehlen, weil die Resultate derselben für das Folgende erforderlich, bis jetzt aber meines Wissens noch nicht genügend und vollständig festgestellt worden sind. Die Existenz der Grenzstellen für Functionen mehrerer Veränderlichen, sowie der Umstand, dass durch $(n-1)$ Gleichungen der in Rede stehenden Art neben einem Gebilde erster Stufe auch noch Gebilde einer höhern Stufe definirt werden können, sobald die Anzahl der Veränderlichen grösser als 2 ist, machten es nothwendig, zunächst das im Vorhergehenden mit $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ bezeichnete Gebilde bestimmt zu definiren, und dann zu zeigen, wie dasselbe durch Adjungirung singulärer Stellen, die in jedem Bereiche von endlicher Ausdehnung nur in beschränkter Anzahl vorhanden sind, zu einem vollständigen analytischen Gebilde ergänzt werden kann. Das Erstere ist so geschehen, dass, wenn $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle in $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ ist, alle übrigen, für welche die absoluten Beträge von $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ eine vorgeschriebene Grenze nicht erreichen sollen, wofern diese hinlänglich klein angenommen wird, durch ein reguläres*) System von $(n-1)$ Gleichungen zwischen den Differenzen $(u_1-a_1), \dots (u_n-a_n)$ gegeben werden.

Die dem Gebilde $\mathfrak{G}'[u_1, \dots u_n]$ zu adjungirenden singulären Stellen sind ferner als solche definirt, denen Stellen dieses Gebildes unendlich nahe liegen.

---

*) Sind $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_m(x_1, \dots x_n)$ ganze Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ sämmtlich verschwinden, und bezeichnet man mit $g_\alpha(x_1, \dots x_n)$ die Summe aller Glieder erster Ordnung in $G_\alpha(x_1, \dots x_n)$, so ist, $m < n$ vorausgesetzt, das Gleichungs-System

$$G_1(x_1, \dots x_n) = 0, \quad \dots \quad G_m(x_1, \dots x_n) = 0$$

ein reguläres, wenn sich $(n-m)$ lineare Functionen $g_{m+1}(x_1, \dots x_n), \dots g_n(x_1, \dots x_n)$ so bestimmen lassen, dass die Determinante von $g_1(x_1, \dots x_n), \dots g_n(x_1, \dots x_n)$ nicht gleich Null ist. Setzt man dann

$$g_{m+1}(x_1, \dots x_n) = t_1, \quad \dots \quad g_n(x_1, \dots x_n) = t_{n-m},$$

so giebt es n völlig bestimmte Functionen

$$\mathfrak{G}_1(t_1, \dots t_{n-m}), \dots \mathfrak{G}_n(t_1, \dots t_{n-m}),$$

durch welche, wenn man für $(t_1, \dots t_{n-m})$ alle dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks von $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_n$ angehörigen Werthsysteme, und $x_1 = \mathfrak{G}_1(t_1, \dots t_{n-m}), \dots x_n = \mathfrak{G}_n(t_1, \dots t_{n-m})$ setzt, sämmtliche den gegebenen Gleichungen genügende Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, in denen der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse unter einer gewissen Grenze liegt, geliefert werden.

Dies war hier zulässig, weil sich aus der angenommenen Beschaffenheit der Functionen F sofort ergiebt, dass sämmtliche Stellen des Gebildes $\mathfrak{G}'$, welche in einer gewissen Umgebung einer in der angegebenen Weise definirten singulären Stelle $(a_1, \dots a_n)$ liegen, einem Systeme von $(n-1)$ von einander unabhängigen Gleichungen*)

$$G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-1}(v_1, \dots v_n) = 0,$$

in denen $v_1, \dots v_n$ die Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ bezeichnen, genügen müssen. Die Existenz dieser Gleichungen ist das Wesentliche, während es im Allgemeinen unstatthaft sein würde, einem monogenen Gebilde irgend einer Stufe in dem Grössengebiet, dem es angehört, jede Stelle zu adjungiren, von der sich zeigen lässt, dass ihr Stellen jenes Gebildes unendlich nahe liegen. In der That giebt es schon im Gebiete zweier Veränderlichen u_1, u_2 monogene Gebilde (erster Stufe), welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass in jeder Umgebung einer ganz beliebig angenommenen Stelle (a_1, a_2) sich

*) Solche $(n-1)$ Gleichungen heissen unabhängig von einander, wenn es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ Werthsysteme $(v_1, \dots v_n)$ giebt, die sämmtliche Gleichungen befriedigen, ohne dass gleichzeitig die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_1}, & \dots & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial v_n} \\ c_1, & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

bei beliebigen Werthen von $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Setzt man, wenn $(v_1', \dots v_n')$ irgend ein derartiges Werthsystem ist,

$$v_1 = v_1' + w_1, \quad \dots \quad v_n = v_n' + w_n,$$

und verwandelt $G_\alpha(v_1, \dots v_n)$ in eine ganze Function $\overline{G}_\alpha(w_1, \dots w_n)$, so ist

$$\overline{G}_1(w_1, \dots w_n) = 0, \quad \dots \quad \overline{G}_{n-1}(w_1, \dots w_n) = 0$$

ein reguläres Gleichungssystem, das ich ein aus dem gegebenen abgeleitetes nenne.

Ebenso heissen $(n-r)$ Gleichungen

$$G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_{n-r}(v_1, \dots v_n) = 0$$

unabhängig von einander, wenn es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ Werthsysteme $(v_1', \dots v_n')$ giebt, die sämmtliche Gleichungen befriedigen und zugleich, wenn man

$$v_\alpha = v_\alpha' + w_\alpha, \quad G_\alpha(v_1' + w_1, \dots v_n' + w_n) = \overline{G}_\alpha(w_1, \dots w_n)$$

setzt, zu einem regulären Gleichungssystem

$$\overline{G}_1(w_1, \dots w_n) = 0, \quad \dots \quad \overline{G}_{n-r}(w_1, \dots w_n) = 0$$

führen.

Stellen des Gebildes finden. Diesem aber jede beliebige Stelle zu adjungiren würde keinen Sinn haben.

Um ein monogenes Gebilde erster, zweiter u. s. w. bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe in einem Gebiete von n unbeschränkt veränderlichen Grössen $(u_1, \dots u_n)$ auf die allgemeinste Weise vollständig zu definiren, hat man Folgendes zu beachten:

Wenn irgend ein System von r Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad G_1(v_1, \dots v_n) = 0, \quad \dots \quad G_r(v_1, \dots v_n) = 0$$

gegeben ist (wo die Ausdrücke auf der Linken wieder ganze Functionen, die an der Stelle $(v_1 = 0, \dots v_n = 0)$ sämmtlich verschwinden, bedeuten), so kann dasselbe, wofern es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ andere Stellen $(v_1, \dots v_n)$ giebt, für die sämmtliche Gleichungen befriedigt werden (wie dies immer der Fall ist, sobald $r < n$), ganz in derselben Weise, wie das im Vorstehenden (Gleichungen (9.)) betrachtete, durch eine gewisse Anzahl anderer Systeme:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = w_{m+1}^{\mu} + G^{(1)}(w_1, \dots w_m) \cdot w_{m+1}^{\mu-1} + \dots + G^{(\mu)}(w_1, \dots w_m) = 0 \\ G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) \cdot w_{m+\nu} = \overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) \qquad (\nu = 2, \dots n-m) \end{cases}$$

(wo $w_1, \dots w_n$ wieder homogene und von einander unabhängige lineare Functionen der Grössen $v_1, \dots v_n$ bedeuten) in der Art ersetzt werden, dass nicht nur jedes die ursprünglichen Gleichungen befriedigende Werthsystem $(v_1, \dots v_n)$, in welchem jede der Grössen v ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze (δ) liegt, auch einem der Gleichungssysteme (B) genügt, und zwar, ohne dass in demselben $G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})$ gleich Null ist; sondern dass dies auch umgekehrt gilt. Dabei darf angenommen werden, dass die Function $G(w_1, \dots w_m, w_{m+1})$ unzerlegbar, d. h. nicht als Product zweier Factoren von derselben Gestalt darstellbar sei, so dass jedes der Gleichungssysteme (B.) ein irreductibeles ist. Ferner sind in jedem dieser Systeme die Functionen $\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_{m+1})$ so beschaffen, dass der Quotient

$$\frac{\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})},$$

wenn $w_1, \dots w_m, w_{m+1}$ der Gleichung $G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$ genügen, stets einen endlichen Werth hat, der unendlich klein wird, wenn $w_1, \dots w_m$ alle unendlich klein werden. Eine Folge hiervon ist, dass zwischen $w_1, \dots w_m$ und

jeder der Grössen $w_{m+\nu}$ eine Gleichung von derselben Form wie zwischen $w_1, \dots w_m$ und w_{m+1} besteht.

Bezeichnet man ferner mit

$$\begin{array}{l}(w'_{m+1}, \dots w'_n)\\ (w''_{m+1}, \dots w''_n)\\ \cdots\cdots\\ (w^{(\mu)}_{m+1}, \dots w^{(\mu)}_n)\end{array}$$

die verschiedenen Werthsysteme der Grössen $w_{m+1}, \dots w_n$, welche zu demselben Werthsystem $(w_1, \dots w_m)$ gehören, und setzt, unter $(s, s_1, \dots s_{n-m})$ unbestimmte Grössen verstehend,

$$\prod_{\lambda=1}^{\mu}(s + w^{(\lambda)}_{m+1}s_1 \cdots + w^{(\lambda)}_n s_{n-m}) = R(s, s_1, \dots s_{n-m}; w_1, \dots w_m),$$

so ist R eine ganze homogene Function μ^{ten} Grades von $s, s_1, \dots s_{n-m}$, deren Coefficienten ganze Functionen von $w_1, \dots w_m$ sind und an der Stelle $(w_1 = 0, \dots w_m = 0)$ sämmtlich verschwinden. Dieser Ausdruck R, als Function von $s, s_1, \dots s_{n-m}$ betrachtet, behält nun die Eigenschaft, als Product von μ linearen Functionen dieser Grössen darstellbar zu sein, auch dann noch, wenn den $w_1, \dots w_m$ solche Werthe gegeben werden, für welche die Discriminante der Gleichung

$$G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0$$

verschwindet; es finden sich alsdann aber unter jenen Factoren gleiche. Dies vorausgesetzt, sei $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$ eines der Werthsysteme $(w_1, \dots w_m)$, für welche die genannte Discriminante verschwindet, und

$$s + \overline{w}_{m+1}s_1 \cdots + \overline{w}_n s_{n-m}$$

einer der Factoren von $R(s, s_1, \dots s_{n-m}; \overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$, und zwar ein $\mu_1$mal vorkommender; so giebt es, wenn man unendlich nahe der Stelle $(\overline{w}_1, \dots \overline{w}_m)$ eine andere $(w_1, \dots w_m)$ annimmt, an der jene Discriminante von Null verschieden ist, unter den zugehörigen, durch die Gleichungen

$$\text{(C)} \qquad G(w_1, \dots w_m, w_{m+1}) = 0, \quad w_{m+\nu} = \frac{\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \dots w_m, w_{m+1})}{G'(w_1, \dots w_m, w_{m+1})} \quad (\nu = 2, \dots n-m)$$

gelieferten Werthsystemen $(w_{m+1}, \dots w_n)$ genau μ_1 solche, für welche die

Differenzen

$$(w_{m+1}-\overline{w}_{m+1}),\ \ldots\ (w_n-\overline{w}_n)$$

sämmtlich unendlich klein sind. Aus diesem Grunde sind alle Werthsysteme $(\overline{w}_1, \ldots \overline{w}_n)$ den durch die vorstehenden Gleichungen unmittelbar gegebenen, in denen die $w_{m+\nu}$ nicht unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, zu adjungiren,*) und bilden im Verein mit diesen die Gesammtheit der durch das Gleichungssystem (C) definirten Werthsysteme $(w_1, \ldots w_n)$, in denen jetzt die $w_1, \ldots w_m$ keiner anderen Beschränkung unterworfen sind als dass sie dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Ausdrücke $G(w_1, \ldots w_{m+1})$, $\overline{G}^{(\nu)}(w_1, \ldots w_{m+1})$ angehören müssen.

Da nun das Gleichungssystem (A), so lange es sich nur darum handelt, alle demselben genügenden Werthsysteme $(v_1, \ldots v_n)$, in denen der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse unter einer beliebig klein anzunehmenden Grenze liegt, zu erhalten, durch eine gewisse Anzahl von Gleichungssystemen von der Form (C) vertreten werden kann; so genügt es nicht nur, ausschliesslich die letzteren zu betrachten, sondern dies ist ebenso nothwendig, wie man z. B. bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwischen mehreren veränderlichen Grössen, wenn dieselbe reductibel ist, sie durch mehrere irreductibele ersetzen muss.

Demgemäss gebe ich nun folgende Definitionen. Es werde zunächst zwischen $(m+1)$ Grössen, die jetzt mit $t_1, \ldots t_{m+1}$ bezeichnet werden mögen, eine Gleichung von der Form

$$(\alpha) \qquad G(t_1, \ldots t_m, t_{m+1}) = t_{m+1}^{\mu} + G^{(1)}(t_1, \ldots t_m) \cdot t_{m+1}^{\mu-1} + \cdots + G^{(\mu)}(t_1, \ldots t_m) = 0,$$

in der die $G^{(\nu)}(t_1, \ldots t_m)$ ganze, an der Stelle $(t_1 = 0, \ldots t_m = 0)$ verschwindende Functionen sind, willkürlich angenommen, mit der einzigen Beschränkung, dass sie irreductibel sei, d. h. dass sich $G(t_1, \ldots t_m, t_{m+1})$ nicht als Product zweier anderen Functionen von derselben Gestalt darstellen lasse. Dann kann man unendlich viele Functionen rationalen Charakters von $t_1, \ldots t_{m+1}$ so bestimmen, dass sie, wenn $t_1, \ldots t_{m+1}$ die Gleichung (α) befriedigen, stets end-

*) Dabei ist jedoch zu bemerken, dass diese Werthsysteme $(\overline{w}_1, \ldots \overline{w}_m)$ sich auch durch Gleichungssysteme von derselben Form wie das vorstehende, in denen aber an die Stelle von m eine kleinere Zahl tritt, bestimmen lassen, und dass diese in der Gesammtheit derer, durch welche die ursprünglichen Gleichungen unter den Grössen v ersetzt werden können, mit enthalten sind.

liche Werthe haben und gleichzeitig mit $t_1, \dots t_m$ unendlich klein werden. Jede solche Function hat aber die Gestalt

$$\frac{\overline{G}(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})},$$

wo der Nenner die Ableitung von $G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$ nach t_{m+1} ist und man annehmen kann, dass im Zähler t_{m+1} in keiner höhern als der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Potenz vorkomme. Setzt man dann, $(n-m-1)$ solche Functionen $\overline{G}$ beliebig auswählend,

$$(\beta) \qquad t_{m+\nu} = \frac{\overline{G}^{(\nu)}(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})} \qquad (\nu = 2, \dots n-m),$$

und, unter $a_1, \dots a_n$ willkürlich anzunehmende Constanten verstehend,

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - a_1 = c_{11} t_1 + \dots + c_{1n} t_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n - a_n = c_{n1} t_1 + \dots + c_{nn} t_n, \end{array} \right.$$

wo auch die $c_{11}, \dots c_{nn}$ Constanten bedeuten, die so gewählt werden müssen, dass die Determinante

$$\left| \begin{array}{l} c_{11}, \dots c_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}, \dots c_{nn} \end{array} \right|$$

nicht gleich Null ist: so nenne ich die Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, die den durch das System der Gleichungen (α), (β) in der vorhin angegebenen Weise definirten Werthsystemen $(t_1, \dots t_n)$ entsprechen, ein »Element« eines Gebildes m^{ter} Stufe im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$, und bezeichne ein solches Element durch

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m.$$

Dabei ist zu bemerken, dass von den Grössen $a_1, \dots a_n$ beliebig viele auch den Werth ∞ haben können, wenn man nur im Falle, dass $a_\alpha = \infty$, unter dem Zeichen $(u_\alpha - a_\alpha)$ die für $u_\alpha = \infty$ verschwindende Function $\frac{1}{u_\alpha}$ versteht.

Wenn $\mu = 1$, so werden alle Grössen $u_1, \dots u_n$ ganze Functionen von $t_1, \dots t_m$; ferner fällt, wenn $m = n-1$, das System der Gleichungen (β) fort.

Sind nun zwei solche Elemente gegeben:

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}^{(1)}[u_1, \dots u_n | b_1, \dots b_n]_m,$$

und sind dieselben so beschaffen, dass in einer gewissen Umgebung einer Stelle $(c_1, \dots c_n)$ jede Stelle des einen Gebildes auch dem andern angehört, so sage ich, die beiden Elemente coincidiren in der Umgebung von $(c_1, \dots c_n)$, und nenne dann jedes Element eine Fortsetzung des andern, insofern es Stellen enthält, die diesem nicht angehören.

Sind ferner beliebig viele Elemente

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m, \quad \mathfrak{G}^{(1)}[u_1, \dots u_n | a_1', \dots a_n']_m, \quad \dots \quad \mathfrak{G}^{(\varrho)}[u_1, \dots u_n | a_1^{(\varrho)}, \dots a_n^{(\varrho)}]_m$$

gegeben, von denen je zwei unmittelbar aufeinander folgende in der Umgebung einer bestimmten Stelle coincidiren, so nenne ich auch das letzte Element eine Fortsetzung des ersten, woraus folgt, dass jedes Element eine Fortsetzung jedes andern ist. Zugleich lässt sich zeigen, dass aus den Gleichungen, durch welche eins dieser Elemente definirt wird, das Gleichungssystem für jedes andere durch eine Reihe analytischer Transformationen abgeleitet werden kann.

Demgemäss nenne ich die Gesammtheit der Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, welche dem ursprünglichen Elemente $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ oder irgend einer Fortsetzung desselben angehören, das durch die Gleichungen $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ definirte Gebilde m^{ter} Stufe im Gebiete der Grössen $(u_1, \dots u_n)$; und bezeichne dasselbe als ein monogenes, weil es in seinem ganzen Umfange durch irgend eins seiner Elemente vollständig bestimmt ist.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken.

1. Wenn in den Gleichungen $(\alpha), (\beta), (\gamma)$, durch welche ein bestimmtes Element $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ eines monogenen Gebildes definirt wird, $\mu = 1$ ist, so werden $t_{m+1}, \dots t_n$ ganze Functionen von $t_1, \dots t_m$, und es ergiebt sich ein reguläres Gleichungssystem zwischen den Grössen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$. Umgekehrt kann man, wenn ein reguläres System von $(n-m)$ Gleichungen zwischen $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ gegeben ist, alle Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$, welche demselben genügen und in einer gewissen Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ liegen, durch Gleichungen von der Form

$$u_1 - a_1 = G(t_1, \dots t_m)_1, \quad \dots \quad u_n - a_n = G(t_1, \dots t_m)_n$$

in der Art darstellen, dass sich aus ihnen $t_1, \dots t_m$ als homogene lineare Functionen von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ ergeben.

Von einem Elemente $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$, welches die angegebene Beschaffenheit hat, sage ich, es sei in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ regulär gestaltet.

Wenn in den Gleichungen (α), (β) $\mu > 1$ ist, so bilden diejenigen Werthsysteme $(t_1, \dots t_n)$, welche dieselben befriedigen, ohne dass gleichzeitig

$$G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1}) = 0$$

ist, eine $2m$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die übrigen nur eine $(2m-2)$-fach ausgedehnte. Setzt man, wenn $(t_1', \dots t_n')$ irgend ein Werthsystem der ersten Art ist, und u_α' der zugehörige Werth von u_α,

$$t_1 = t_1' + \tau_1, \quad \dots \quad t_n = t_n' + \tau_n,$$

so lassen sich $\tau_{m+1}, \dots \tau_n$, und somit auch $(u_1 - u_1'), \dots (u_n - u_n')$ als ganze Functionen von $\tau_1, \dots \tau_m$ ausdrücken, und man erhält so ein Element

$$\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | u_1', \dots u_n']_m,$$

das in der Umgebung der Stelle $(u_1', \dots u_n')$ mit $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ coincidirt und regulär gestaltet ist. Daraus ergiebt sich, dass überhaupt in einem monogenen Gebilde m^{ter} Stufe die Gesammtheit der Stellen, in deren Umgebung ein nicht regulär gestaltetes Element des Gebildes existirt, nur eine Mannigfaltigkeit von $(2m-2)$ Dimensionen bildet, also namentlich in dem Falle, wo $m = 1$, aus vereinzelten Stellen besteht. Ferner zeigt sich, dass der Übergang von einem beliebigen Elemente zu irgend einem andern stets vermittelt werden kann durch eine Reihe regulär gestalteter Elemente.

2. Die innerhalb eines bestimmten Bereichs unbeschränkt veränderlichen Grössen $t_1, \dots t_m$, sowie die von ihnen abhängigen $t_{m+1}, \dots t_n$, welche zur Darstellung eines Elements $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_m$ dienen, sind so gewählt worden, dass sie selbst lineare Functionen von $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ sind. Damit ist auf die einfachste Weise erreicht worden, dass zu zwei verschiedenen Werthsystemen $(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$ auch stets verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ gehören. Indessen ist es weder nothwendig noch auch immer das Angemessenste, dass $t_1, \dots t_{m+1}$ gerade in dieser Art mit $u_1, \dots u_n$ zusammenhängen.

Nimmt man nämlich die Gleichung (α) den angegebenen Bedingungen

gemäss, im Übrigen willkürlich an, und setzt

$$(\delta) \qquad u_1 - a_1 = \frac{G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})_1}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})}, \quad \dots \quad u_n - a_n = \frac{G(t_1, \dots t_m, t_{m+1})_n}{G'(t_1, \dots t_m, t_{m+1})},$$

so wird durch diese Gleichungen, wenn die Zähler der Brüche so gewählt werden, dass für alle in Betracht kommenden Werthsysteme $(t_1, \dots t_{m+1})$, welche die Gleichung

$$G(t_1, \dots t_m, t_{m+1}) = 0$$

befriedigen, $(u_1 - a_1), \dots (u_n - a_n)$ endliche Werthe haben, und dass zu verschiedenen Werthsystemen $(t_1, \dots t_m, t_{m+1})$, wenigstens wenn der absolute Betrag jeder dieser Grössen unter einer gewissen Grenze liegt, auch verschiedene Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ gehören, stets ein monogenes Gebilde m^{ter} Stufe zum Theil oder auch vollständig dargestellt. Man kann daher bei der Definition eines solchen Gebildes statt Gleichungen von der Form (γ) solche von der Form (δ) zu Grunde legen; wobei es sich dann empfiehlt, die Gesammtheit der durch die Gleichungen (α), (δ) dargestellten Werthsysteme $(u_1, \dots u_n)$ einen Zweig eines Gebildes m^{ter} Stufe zu nennen, die Bedeutung eines Elementes aber so festzuhalten wie sie vorher gegeben ist.

Der Begriff der Coincidenz zweier Zweige in der Umgebung einer bestimmten Stelle wird dann in derselben Weise festgestellt wie für zwei Elemente, ebenso die Bedeutung der Fortsetzung eines Zweiges.

3. Wenn $m = 1$, so kann man alle der Gleichung $G(t_1, t_2) = 0$ genügenden Werthepaare, wie schon vorhin bemerkt worden, durch ein Functionenpaar $g_1(\tau), g_2(\tau)$, wo τ eine neue Veränderliche bedeutet, darstellen, vorausgesetzt, dass es sich nur um solche handelt, bei denen die absoluten Beträge von t_1, t_2 eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Es kann daher jedes Element $\mathfrak{G}[u_1, \dots u_n | a_1, \dots a_n]_1$ durch n Gleichungen

$$u_1 - a_1 = G(\tau)_1, \quad \dots \quad u_n - a_n = G(\tau)_n$$

dargestellt werden, aus denen dann die entsprechenden Gleichungen für jedes andere Element auf die oben angegebene Weise abzuleiten sind. Man kann daher bei der Definition eines Gebildes erster Stufe auch von solchen Gleichungen ausgehen, und mit denselben, um das ganze Gebilde zu bestimmen, so verfahren wie oben (unter E) beschrieben worden.

In analoger Weise ist es stets möglich, ein Gebilde m^{ter} Stufe im Ge-

biete von n Veränderlichen, wenn $m > 1$, in der Art in Elemente zu zerlegen, dass jedes einzelne durch Gleichungen von der Form

$$u_1 - a_1 = G_1(\tau_1, \dots \tau_m), \quad \dots \quad u_n - a_n = G_n(\tau_1, \dots \tau_m)$$

dargestellt wird, in denen $G_1, \dots G_n$ ganze Functionen von m innerhalb eines bestimmten Bereichs unbeschränkt veränderlichen Grössen $\tau_1, \dots \tau_m$ sind und an der Stelle $(\tau_1 = 0, \dots \tau_m = 0)$ verschwinden.

§ 4.

Die Anwendung der vorstehenden, dem Gebiete der allgemeinen Functionenlehre angehörigen Erörterungen, auf die ich aus dem schon oben angegebenen Grunde eingehen zu müssen glaubte, auf das durch die obigen Gleichungen

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(u_1, \dots u_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_{n-1}(u_1, \dots u_n) = 0 \\ F_n(u_1, \dots u_n) = x \end{array} \right.$$

im Gebiete der $n+1$ Grössen $u_1, \dots u_n, x$ definirte Gebilde in Verbindung mit den in meiner Abhandlung »Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen«*) enthaltenen Andeutungen führt schliesslich zu folgendem Satze:

»Aus jeder $2n$-fach periodischen Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich stets, auf mannigfaltige Weise, ein System von n Functionen

$$\psi_1(x), \quad \dots \psi_n(x)$$

Einer Veränderlichen erhalten, welche zusammengehörige Abelsche Integrale erster Art und so beschaffen sind, dass jedes Periodensystem derselben auch ein Periodensystem der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ bildet.

Die Ableitungen sämmtlicher Functionen $\psi_1(x), \dots \psi_n(x)$ können rational durch x und eine algebraische Function $\varphi(x)$ dieser Grösse ausgedrückt werden.«

Nun kann man aber, wie aus der Theorie der Abelschen Transcendenten bekannt ist, alle Abelschen Integrale erster Art, deren Ableitungen rationale

*) Crelle's Journal, Bd. 89 [Bd. II, S. 125 dieser Ausgabe].

Functionen von x und einer und derselben algebraischen Function $\varphi(x)$ sind, durch eine bestimmte Anzahl von ihnen, $\Psi_1, \dots \Psi_\varrho$, in der Form

$$c_0 + c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \cdots + c_\varrho\Psi_\varrho,$$

wo die c willkürliche Constanten bedeuten, darstellen und zugleich die $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_\varrho$ so wählen, dass alle Periodensysteme derselben sich zusammensetzen lassen aus den folgenden ϱ bestimmten

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{matrix}$$

und aus ϱ anderen

$$\begin{matrix} \pi_{1,1}, & \pi_{2,1}, & \cdots & \pi_{\varrho,1} \\ \pi_{1,2}, & \pi_{2,2}, & \cdots & \pi_{\varrho,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{1,\varrho}, & \pi_{2,\varrho}, & \cdots & \pi_{\varrho,\varrho} \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\pi_{a,b} = \pi_{b,a}$$

ist. Dabei ist zu bemerken, dass im Allgemeinen ϱ grösser, niemals aber kleiner als n ist.

Setzt man nun (für $\alpha = 1, 2, \dots n$)

$$\psi_\alpha = c_{\alpha,0} + \sum_{a=1}^{\varrho} c_{\alpha,a}\Psi_a$$

und bezeichnet mit

$$\Omega_{1,n}, \dots \Omega_{n,n}$$

dasjenige Periodensystem von $\psi_1, \dots \psi_n$, welches dem n^{ten} der vorstehenden entspricht, so führt die angegebene Relation unter den Grössen π zu der folgenden:

$$\sum_{a=1}^{\varrho} (\Omega_{\alpha,a}\Omega_{\beta,\varrho+a} - \Omega_{\beta,a}\Omega_{\alpha,\varrho+a}) = 0,$$

welche für je zwei Zahlen α, β aus der Reihe $1, 2, \dots n$ besteht.

Jetzt seien

$$\begin{matrix} \tilde{\omega}_{1,1}, & \tilde{\omega}_{2,1}, & \cdots & \tilde{\omega}_{n,1} \\ \tilde{\omega}_{1,2}, & \tilde{\omega}_{2,2}, & \cdots & \tilde{\omega}_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\omega}_{1,2n}, & \tilde{\omega}_{2,2n}, & \cdots & \tilde{\omega}_{n,2n} \end{matrix}$$

irgend $2n$ primitive Periodensysteme der Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$, d. h. solche, aus denen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, so ist nach dem angeführten Satze

$$\Omega_{\alpha,\pi} = \sum_{\varkappa=1}^{2n} m_{\pi,\varkappa}\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa},$$

wo die $m_{\pi,\varkappa}$ ganze Zahlen sind, und es entspringen also aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ in der vorstehenden Gleichung zusammengefassten Relationen unter den Grössen Ω ebenso viele unter den $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$. Man erhält so den Satz:

A. Unter den $2n.n$ Grössen $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ bestehen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen von der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda)\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}\, \tilde{\omega}_{\beta,\lambda} = 0,$$

in denen die von den Indices α, β unabhängigen Coefficienten $(\varkappa, \lambda)$ ganze Zahlen und so beschaffen sind, dass

$$(\varkappa, \lambda) = -(\lambda, \varkappa).$$

Die Grössen $\pi_{a,b}$ haben ferner die Eigenschaft, dass die quadratische Form

$$i \sum_{a=1}^{\varrho} \sum_{b=1}^{\varrho} (\pi'_{a,b} - \pi_{a,b})\, \sigma_a \sigma_b,$$

wo $\pi'_{a,b}$ die mit $\pi_{a,b}$ conjugirte Grösse bedeutet, bei reellen Werthen von $\sigma_1, \dots \sigma_\varrho$, wenn dieselben nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen positiven Werth hat.

Hieraus ergiebt sich zunächst für die Grössen $\Omega_{\alpha,\pi}$ und dann für die $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ eine entsprechende Eigenschaft, die sich folgendermassen ausdrücken lässt:

B. Die bilineare Form

$$i \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa, \lambda)\, X_\varkappa X'_\lambda$$

erhält stets einen positiven Werth, wenn man

$$X_\varkappa = \sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha\, \tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa},$$

$$X'_\varkappa = \sum_{\alpha=1}^{n} t'_\alpha\, \tilde{\omega}'_{\alpha,\varkappa}$$

setzt, den Grössen $t_1, \dots t_n$ beliebige Werthe, die nicht sämmtlich gleich Null sind, beilegt, und unter t'_α, $\tilde{\omega}'_{\alpha,\varkappa}$ die mit t_α, $\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa}$ conjugirten Grössen versteht.

Es ist nämlich (für $\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho$)

$$\Omega_{\alpha,\mathfrak{a}} = c_{\alpha,\mathfrak{a}},$$

$$\Omega_{\alpha,\varrho+\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} c_{\alpha,\mathfrak{b}}\,\pi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

und daher, wenn man

$$U_{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha \Omega_{\alpha,\mathfrak{n}}, \qquad (\text{für } \mathfrak{n} = 1, 2, \dots 2\varrho)$$

$$S_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,\mathfrak{a}} t_\alpha \qquad (\text{für } \mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho)$$

setzt und unter $U'_{\mathfrak{n}}$, $S'_{\mathfrak{a}}$ die mit $U_{\mathfrak{n}}$, $S_{\mathfrak{a}}$ conjugirten Grössen versteht,

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} S'_{\mathfrak{b}} \pi'_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S'_{\mathfrak{a}} S_{\mathfrak{b}} \pi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}.$$

In der zweiten Doppelsumme vertausche man die Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit einander und setze in der ersten $\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ für $\pi'_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$, so ergiebt sich

$$i \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} (U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} - U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} S'_{\mathfrak{b}} (\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) i,$$

oder wenn

$$t_\alpha = \xi_\alpha + \eta_\alpha i, \quad t'_\alpha = \xi_\alpha - \eta_\alpha i,$$
$$S_\alpha = \sigma_\alpha + \tau_\alpha i, \quad S'_\alpha = \sigma_\alpha - \tau_\alpha i$$

gesetzt wird,

$$i \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} (U_{\mathfrak{a}} U'_{\varrho+\mathfrak{a}} - U_{\varrho+\mathfrak{a}} U'_{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\varrho} (\sigma_{\mathfrak{a}} \sigma_{\mathfrak{b}} + \tau_{\mathfrak{a}} \tau_{\mathfrak{b}})(\pi'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) i.$$

Der Ausdruck auf der Rechten dieser Gleichung ist stets positiv, wenn die Grössen σ, τ nicht sämmtlich gleich Null sind, was nur der Fall ist, wenn $t_1, \dots t_n$ sämmtlich verschwinden. (Denn man hat

$$\sum_{\alpha=1}^{n} t_\alpha \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,0} t_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} c_{\alpha,\mathfrak{a}} t_\alpha \Psi_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha,0} t_\alpha + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho} S_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}},$$

und es können daher, da unter den Functionen $\psi_1, \dots \psi_n$ keine lineare Relation besteht, die Grössen $S_{\mathfrak{a}}$ nur in dem angegebenen Falle sämmtlich gleich Null sein.) Es ist aber

$$U_{\mathfrak{n}} = \sum_{\chi=1}^{2n} m_{\mathfrak{n},\chi} X_\chi \qquad (\mathfrak{n} = 1, 2, \dots 2\varrho)$$

und daher

$$i\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\varrho}(U_{\mathfrak{a}}U'_{\varrho+\mathfrak{a}}-U_{\varrho+\mathfrak{a}}U'_{\mathfrak{a}}) = i\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,X_\varkappa X'_\lambda,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Man setze

$$\tilde{\omega}_{\alpha,\varkappa} = P_{\alpha,\varkappa}+iQ_{\alpha,\varkappa}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,2,\dots n\\ \varkappa=1,2,\dots 2n\end{pmatrix}$$

wo die P und Q reelle Grössen bezeichnen sollen, und

$$(PP)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,P_{\alpha,\varkappa}P_{\beta,\lambda},$$
$$(PQ)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,P_{\alpha,\varkappa}Q_{\beta,\lambda},$$
$$(QQ)_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)\,Q_{\alpha,\varkappa}Q_{\beta,\lambda}.$$

Dann ist, in Folge der Relation

$$(\varkappa,\lambda) = -(\lambda,\varkappa),$$
$$(PP)_{\alpha,\beta} = -(PP)_{\beta,\alpha},$$
$$(QQ)_{\alpha,\beta} = -(QQ)_{\beta,\alpha};$$

der Satz A. aber besagt, dass

$$(PP)_{\alpha,\beta} = (QQ)_{\alpha,\beta},$$
$$(PQ)_{\alpha,\beta} = (PQ)_{\beta,\alpha}.$$

Der Satz B. lässt sich dann, mit Berücksichtigung dieser Relationen, folgendermassen ausdrücken:

Die bilineare Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}((PQ)_{\alpha,\beta}+i(PP)_{\alpha,\beta})t_\alpha t'_\beta$$

erhält stets einen positiven Werth, wenn man

$$t_\alpha = \xi_\alpha+\eta_\alpha i, \quad t'_\alpha = \xi_\alpha-\eta_\alpha i$$

setzt und den Grössen ξ, η beliebige reelle Werthe, die nicht sämmtlich gleich Null sind, beilegt.

Dies kommt bekanntlich darauf hinaus, dass n bestimmte, aus den Grössen

$$(PQ)_{\alpha,\beta} \quad \text{und} \quad (PP)_{\alpha,\beta}$$

zusammengesetzte Ausdrücke positive Werthe haben müssen.

Unter Anderem folgt hieraus, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} P_{1,1}, & \dots & P_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n,1}, & \dots & P_{n,2n} \\ Q_{1,1}, & \dots & Q_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{n,1}, & \dots & Q_{n,2n} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} (1,1), & \dots & (1,2n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (2n,1), & \dots & (2n,2n) \end{vmatrix}$$

beide von Null verschieden sind. Denn es ist, wenn man

$$\bar{\xi}_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\alpha=1}^{n} (\varkappa,\lambda)(\eta_\alpha P_{\alpha,\varkappa} + \xi_\alpha Q_{\alpha,\varkappa}),$$

$$\bar{\eta}_{\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha P_{\alpha,\lambda} - \eta_\alpha Q_{\alpha,\lambda})$$

setzt,

$$i \sum_{\varkappa=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{2n} (\varkappa,\lambda) X_\varkappa X'_\lambda = -2 \sum_{\lambda=1}^{2n} \bar{\xi}_\lambda \bar{\eta}_{\lambda},$$

und es darf daher, wenn dieser Ausdruck die angegebene Beschaffenheit haben soll, die Determinante der — als Functionen von $\eta_1, \dots \eta_n$, $\xi_1, \dots \xi_n$ aufgefassten — $\bar{\xi}_1, \dots \bar{\xi}_{2n}$ nicht gleich Null sein. Diese Determinante ist aber das Product der beiden in Rede stehenden.

Ferner ist noch zu bemerken, dass die beiden Sätze A., B. auch noch gelten, wenn die betrachteten Periodensysteme keine primitiven, sondern nur von einander unabhängige sind, d. h. solche, aus denen sich keines zusammensetzen lässt, in welchem sämmtliche Perioden gleich Null sind. Denn sind

$$\begin{matrix} \omega_{1,1}, & \dots & \omega_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{1,2n}, & \dots & \omega_{n,2n} \end{matrix}$$

$2n$ solche Systeme, so hat man

$$m \cdot \tilde{\omega}_{\sigma,\varkappa} = \sum_{\mu=1}^{2n} a_{\varkappa,\mu}\omega_{\alpha,\mu},$$

wo m und sämmtliche $a_{\varkappa,\mu}$ ganze Zahlen bedeuten, und es ergiebt sich die Richtigkeit des Behaupteten sofort daraus, dass die Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)X_\varkappa Y_\lambda$$

sich durch die Substitutionen

$$X_\varkappa = \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{2n} a_{\varkappa,\mu}U_\mu, \quad Y_\lambda = \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{2n} a_{\lambda,\nu}V_\nu$$

in eine andere

$$\frac{1}{m^2}\sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}[\mu,\nu]U_\mu V_\nu$$

verwandelt, in der die Coefficienten $[\mu,\nu]$ ganze Zahlen sind, unter denen die Relation

$$[\mu,\nu] = -[\nu,\mu]$$

besteht.

Die Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n}(\varkappa,\lambda)X_\varkappa Y_\lambda$$

lässt sich stets durch Substitutionen von der Gestalt

$$X_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{2n} h_{\varkappa,\mu}U_\mu,$$

$$Y_\lambda = \sum_{\nu=1}^{2n} h_{\lambda,\nu}V_\lambda$$

in die einfachere

$$\sum_{\gamma=1}^{n}(U_\gamma V_{n+\gamma} - U_{n+\gamma}V_\gamma)$$

verwandeln — wobei der Umstand, dass die Determinante $|(\varkappa,\lambda)|$ nicht den Werth Null hat, von wesentlicher Bedeutung ist —, und zwar in der Art, dass in den Ausdrücken der neuen Veränderlichen (U, V) durch die ursprünglichen (X, Y) die Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen werden.

Daraus ergiebt sich der Satz:

C. Es ist stets möglich — und zwar auf unendlich viele Arten —, aus beliebigen $2n$ primitiven Periodensystemen einer

Function $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ ebenso viele andere, wenn auch im Allgemeinen keine primitiven Periodensysteme

$$\begin{matrix} \omega_{1,1}, & \cdots & \omega_{n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{1,2n}, & \cdots & \omega_{n,2n} \end{matrix}$$

so zusammenzusetzen, dass für je zwei derselben die Gleichung

$$\sum_{\gamma=1}^{n} (\omega_{\alpha,\gamma}\omega_{\beta,n+\gamma} - \omega_{\beta,\gamma}\omega_{\alpha,n+\gamma}) = 0$$

gilt.

Erhält man nämlich durch Ausführung der angegebenen Transformation

$$MU_\nu = \sum_{\chi=1}^{2n} m_{\nu,\chi} X_\chi \qquad (\text{für } \nu = 1, 2, \ldots 2n)$$

und somit auch

$$MV_\nu = \sum_{\chi=1}^{2n} m_{\nu,\chi} Y_\chi,$$

wo M und sämmtliche $m_{\nu,\chi}$ ganze Zahlen bedeuten, so setze man

$$\omega_{\alpha,\nu} = \sum_{\chi=1}^{2n} m_{\nu,\chi}\tilde{\omega}_{\alpha,\chi};$$

und es wird dann die vorstehende Gleichung bis auf den Factor M^2 identisch mit der unter A. aufgestellten.

Ganz ebenso ergiebt sich für die jetzt betrachteten Periodensysteme der Satz:

D. Die Function von $\xi_1, \ldots \xi_n$, $\eta_1, \ldots \eta_n$, in welche

$$i\sum_{\gamma=1}^{n} (U_\gamma V_{n+\gamma} - U_{n+\gamma}V_\gamma)$$

übergeht, wenn man

$$U_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha + \eta_\alpha i)\omega_{\alpha,\nu},$$

$$V_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha - \eta_\alpha i)\omega'_{\alpha,\nu}$$

setzt, wo wieder $\omega'_{\alpha,\nu}$ die mit $\omega_{\alpha,\nu}$ conjugirte Grösse bedeutet, hat für reelle Werthe der Veränderlichen ξ, η, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen *positiven* Werth.

Sind irgend $2n$ derartige Periodensysteme

$$\begin{matrix} \omega_{1,1}, & \cdots & \omega_{n,1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_{1,2n}, & \cdots & \omega_{n,2n} \end{matrix}$$

gefunden, so erhält man aus ihnen alle übrigen durch das von Kronecker in der Abhandlung »Über bilineare Formen«*) angegebene Verfahren.

Namentlich darf man, wenn γ eine der Zahlen $1, \dots n$ ist, die beiden Systeme

$$\omega_{1,\gamma}, \quad \cdots \omega_{n,\gamma}$$

und

$$\omega_{1,n+\gamma}, \cdots \omega_{n,n+\gamma}$$

mit einander vertauschen, wenn man zugleich

$$-\omega_{\alpha,\gamma} \quad \text{für} \quad \omega_{\alpha,\gamma} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

setzt. Ebenso ist es gestattet, je zwei Systeme der ersten Hälfte und gleichzeitig die entsprechenden der anderen mit einander zu vertauschen.

Auf diese Weise kann man die gegebenen Periodensysteme so umändern, dass die n ersten durch je n aus allen $2n$ beliebig ausgewählte ersetzt werden. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $\omega_{\alpha,\beta}$ gleich den ursprünglichen $\tilde{\omega}_{\alpha,\beta}$ die Eigenschaft haben, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,\varkappa}, & \omega_{1,\lambda}, & \cdots & \omega_{1,\nu} \\ \omega_{2,\varkappa}, & \omega_{2,\lambda}, & \cdots & \omega_{2,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_{n,\varkappa}, & \omega_{n,\lambda}, & \cdots & \omega_{n,\nu} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa, \lambda, \dots \nu$ irgend n von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots 2n$ bezeichnen, nicht sämmtlich gleich Null sind.

§ 5.

Nach dem Vorstehenden ist es, wenn irgend eine $2n$-fach periodische Function $\varphi(u_1, \dots u_n)$ von dem angegebenen analytischen Charakter gegeben

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1866, p. 609.

ist, immer möglich, $2n$ Periodensysteme

$$\begin{array}{c} \omega_{1,1}, \ \ldots \ \omega_{n,1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \omega_{1,n}, \ \ldots \ \omega_{n,n} \\ \omega'_{1,1}, \ \ldots \ \omega'_{n,1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \omega'_{1,n}, \ \ldots \ \omega'_{n,n} \end{array}$$

derselben zu finden, welche genau die in der Einleitung (S. 59) angegebenen Bedingungen erfüllen, so dass es möglich ist, eine Function $G(u_1, \ldots u_n; v_1, \ldots v_n)$ und eine zugehörige Function $\theta(u_1, \ldots u_n)$ zu bilden, für welche die früher (S. 56) erklärten Grössen $\omega_{\alpha,\beta}$ und $\omega'_{\alpha,\beta}$ mit den gegebenen übereinstimmen. Aus dieser Function $\theta(u_1, \ldots u_n)$ kann man sodann auf die in der Einleitung angegebene Weise n von einander unabhängige Functionen

$$\wp_1(u_1, \ldots u_n), \ \ldots \ \wp_n(u_1, \ldots u_n)$$

ableiten, von denen jede die Periodensysteme der Function $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ ebenfalls als Periodensysteme besitzt. Ist nun $\wp_{n+1}(u_1, \ldots u_n)$ irgend eine andere Function der gleichen Art, wie $\wp_1, \ldots \wp_n$, so ist $\wp_{n+1}$ eine algebraische Function der Grössen $\wp_1, \ldots \wp_n$.

Aus den Eigenschaften der Abelschen Integrale erster Art ergiebt sich nämlich, dass der Ausdruck $\wp_{n+1}(u_1, \ldots u_n)$, als Function von $\wp_1, \ldots \wp_n$ betrachtet, im Gebiete dieser Grössen überall definirt ist, und zwar so, dass er in der Umgebung jeder bestimmten Stelle des Gebietes $(\wp_1, \ldots \wp_n)$ wie eine algebraische Function sich verhält, was nach einem bekannten Satze*) ausreicht, um das Behauptete festzustellen.

Durch geeignete Wahl der Function $\wp_{n+1}$ kann man erreichen, dass sich jede Function, welche den gleichen analytischen Charakter und die gleichen

*) Dieser Satz lautet: Lässt sich für eine ein- oder mehrdeutige Function von beliebig vielen Veränderlichen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ beweisen, dass sie in der Umgebung jeder bestimmten Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ wie eine algebraische Function sich verhält, so ist damit festgestellt, dass sie wirklich eine algebraische Function ist. Für eindeutige Functionen habe ich diesen Satz zuerst in einem an C. W. Borchardt gerichteten, im 89. Bande des Crelleschen Journals abgedruckten Briefe ausgesprochen. Einen Beweis desselben hat dann Herr Hurwitz gegeben (Crelles Journal Bd. 95, S. 201). Derselbe lässt sich aber ohne Schwierigkeit auf mehrdeutige Functionen von beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen.

Periodensysteme wie die Function $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ besitzt, also insbesondere diese letztere selbst, rational durch die $(n+1)$ Functionen $\wp_1, \wp_2, \ldots \wp_{n+1}$ ausdrücken lässt.

Damit ist der Beweis des am Schlusse der Einleitung (S. 67) ausgesprochenen Satzes erbracht.

ÜBER DIE CONVERGENZ DER θ-REIHEN BELIEBIG VIELER ARGUMENTE.

Setzt man in der durch die unendliche Reihe

$$1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{nn}e^{2nxi}$$

definirten Jacobi'schen Function $\vartheta_3(x,q)$

$$q=e^a,\quad xi=bu+b',$$

multiplicirt sie darauf mit

$$e^{a'u^2+2b''u+a''}$$

und bezeichnet das Product, als Function von u betrachtet, mit $\theta(u)$, so hat man

$$\theta(u)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{G(u;n)},$$

wo

$$G(u;n)=an^2+a'u^2+a''+2bnu+2b'n+2b''u$$

eine ganze Function von u und n ist, deren Coefficienten keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass jeder von ihnen einen endlichen Werth hat und der reelle Bestandtheil von a negativ sein muss.

Die so definirte Function $\theta(u)$, in welcher die speciellen, von Jacobi in die Theorie der elliptischen Transcendenten eingeführten θ-Functionen sämmtlich enthalten sind, nenne ich die allgemeine Jacobi'sche oder θ-Function des Argumentes u.

In ähnlicher Weise definire ich die allgemeinste θ-Function von n Argumenten $(u_1, \dots u_n)$.

Es sei

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$$

eine ganze Function zweiten Grades der $2n$ Grössen

$$u_1, \dots u_n; \quad v_1, \dots v_n;$$

so stellt die unendliche Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)},$$

wenn für $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$ alle Systeme ganzer Zahlen gesetzt werden und die Coefficienten von G so beschaffen sind, dass die Reihe für jedes System endlicher Werthe der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ convergirt, eine (transcendente) ganze Function dieser Grössen dar, die ich mit

$$\Theta(u_1, \dots u_n)$$

bezeichne.

Zur Vervollständigung dieser Definition ist aber eine genaue Untersuchung der Bedingungen, unter denen die aufgestellte Reihe convergirt, erforderlich.

Setzt man

$$\chi(v_1, \dots v_n) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} v_\alpha v_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots n)$$

so lässt sich

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) \text{ auf die Form } \chi(v_1, \dots v_n) + 2 \sum_\alpha v_\alpha U_\alpha + U$$

bringen, wo U eine ganze Function zweiten Grades von $u_1, \dots u_n$ ist und $U_1, \dots U_n$ lineare Functionen derselben Grössen bezeichnen. Ist dann

$$\chi(v_1, \dots v_n) = \chi_1(v_1, \dots v_n) + i\chi_2(v_1, \dots v_n),$$

wo unter χ_1, χ_2 quadratische Formen von $v_1, \dots v_n$ mit reellen Coefficienten zu verstehen sind, und bezeichnet man, für ein beliebig angenommenes System endlicher Werthe von $u_1, \dots u_n$, die reellen Bestandtheile von $U, U_1, \dots U_n$ mit $U', U_1', \dots U_n'$, so ist der absolute Betrag von $e^{G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)}$ gleich

$$e^{\chi_1(v_1, \dots v_n) + 2\sum_\alpha v_\alpha U_\alpha' + U'};$$

es muss also, damit die in Rede stehende Reihe für das betrachtete Werthsystem $(u_1, \dots u_n)$ convergire, die Grösse

$$e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) + 2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha}$$

unendlich klein werden, wenn auch nur eine der ganzen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$ unendlich gross wird. Dasselbe gilt für die Grösse

$$e^{\chi_1(-\mathfrak{n}_1, \cdots -\mathfrak{n}_n) - 2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha},$$

und somit auch für das Product

$$e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) + 2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha} \cdot e^{\chi_1(-\mathfrak{n}_1, \cdots -\mathfrak{n}_n) - 2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha U'_\alpha} = e^{2\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst, dass die Function $\chi_1(v_1, \dots v_n)$ bei reellen Werthen von $v_1, \dots v_n$ stets negativ oder gleich Null sein muss. Denn wäre sie für irgend ein System reeller Werthe von $v_1, \dots v_n$ positiv, so liesse sich auch ein System rationaler Zahlen $v'_1, \dots v'_n$ finden, für das $\chi_1(v'_1, \dots v'_n)$ einen positiven Werth hätte, und man könnte eine ganze Zahl k so annehmen, dass $kv'_1, \dots kv'_n$ sämmtlich ganze Zahlen wären und zugleich der Werth von

$$e^{\chi_1(kv'_1, \dots kv'_n)} = e^{k^2 \chi_1(v'_1, \dots v'_n)}$$

beliebig gross würde.

Angenommen nun, es erfülle $\chi_1(v_1, \dots v_n)$ die angegebene Bedingung, so lassen sich bekanntlich n homogene lineare Functionen $N_1, \dots N_n$ von $v_1, \dots v_n$ mit reellen Coefficienten so bestimmen, dass

$$\chi_1(v_1, \dots v_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha N_\alpha^2$$

und zugleich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} N_\alpha^2$$

wird, wo $c_1, \dots c_n$ reelle Constanten bedeuten, von denen jede, die nicht gleich Null ist, einen negativen Werth hat.

Um zunächst den Fall zu erledigen, wo eine dieser Grössen c_α gleich Null ist, schicke ich folgenden Hülfssatz voraus:

»Es seien

$$N_1(v_1, \dots v_n), \quad \dots \quad N_{n-1}(v_1, \dots v_n)$$

irgend $n-1$ homogene lineare Functionen der n Veränderlichen $\nu_1, \dots \nu_n$ mit reellen Coefficienten, so ist es stets möglich, unendlich viele Systeme ganzzahliger Werthe von $\nu_1, \dots \nu_n$ anzugeben, für welche die absoluten Beträge der entsprechenden Werthe von $N_1, \dots N_{n-1}$ sämmtlich kleiner sind als eine gegebene Grösse.«

Beweis. Es sei h eine positive Grösse, unterhalb welcher der absolute Betrag jeder der Functionen $N_1, \dots N_{n-1}$ beständig bleibt, wenn den Veränderlichen $\nu_1, \dots \nu_n$ nur solche Werthe beigelegt werden, die $\geqq 0$ und < 1 sind. Bestimmt man dann irgend ein System reeller Grössen $\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n$ so, dass die Gleichungen

$$N_1(\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n) = 0, \quad \dots \quad N_{n-1}(\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n) = 0$$

bestehen und bezeichnet, für eine beliebig anzunehmende ganze Zahl m, mit $\nu_\alpha^{(m)}$ die grösste in $m\bar{\nu}_\alpha$ enthaltene ganze Zahl, so hat man

$$|N_1(m\bar{\nu}_1 - \nu_1^{(m)}, \dots m\bar{\nu}_n - \nu_n^{(m)})| < h, \quad \dots \quad |N_{n-1}(m\bar{\nu}_1 - \nu_1^{(m)}, \dots m\bar{\nu}_n - \nu_n^{(m)})| < h,$$

woraus

$$|N_1(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)})| < h, \quad \dots \quad |N_{n-1}(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)})| < h$$

folgt.

Nun sei g eine beliebig angenommene positive Grösse, und es werde mit $k_\beta^{(m)}$ die grösste in

$$\frac{1}{g} N_\beta(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)}) \qquad (\beta = 1, \dots n-1)$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist, wenn man

$$N_\beta(\nu_1^{(m)}, \dots \nu_n^{(m)}) = k_\beta^{(m)} g + g_\beta^{(m)}$$

setzt,

$$0 \leqq g_\beta^{(m)} < g,$$

und jede der Zahlen $k_\beta^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{h}{g} + 1.$$

Für jeden bestimmten Werth von g giebt es also unter den Zahlsystemen

$$k_1^{(m)}, \dots k_n^{(m)}$$

nur eine endliche Anzahl (r) von einander verschiedener; unter diesen müssen

sich daher, wenn man der Zahl m irgend $r+1$ verschiedene Werthe giebt, mindestens zwei (m', m'') finden, für welche

$$k_\beta^{(m')} = k_\beta^{(m'')} \qquad (\beta = 1, \dots n-1)$$

wird. Setzt man dann

$$\nu_\alpha = \nu_\alpha^{(m')} - \nu_\alpha^{(m'')}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so ist

$$N_\beta(\nu_1, \dots \nu_n) = g_\beta^{(m')} - g_\beta^{(m'')},$$

und es sind also die absoluten Beträge von

$$N_1(\nu_1, \dots \nu_n), \quad \dots \quad N_{n-1}(\nu_1, \dots \nu_n)$$

sämmtlich kleiner als g.

Nun kann aber mindestens eine der Grössen $\bar{\nu}_1, \dots \bar{\nu}_n$ beliebig angenommen werden; giebt man ihr einen ganzzahligen von Null verschiedenen Werth, so lassen sich demgemäss unendlich viele Systeme ganzzahliger Werthe von $\nu_1, \dots \nu_n$ so bestimmen, dass die entsprechenden Werthe von $N_1, \dots N_{n-1}$ ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als die willkürlich anzunehmende Grösse g werden.

Nach diesem Satze giebt es also, wenn eine der obigen Grössen c_α gleich Null ist, und diejenige von ihnen, die den grössten absoluten Betrag hat, mit c' bezeichnet wird, unendlich viele Systeme von n ganzen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n$, für welche

$$|\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)| = |\sum_\alpha c_\alpha N_\alpha^2| < (n-1)|c'|g^2$$

ist, also $e^{\chi_1(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}$ der Einheit so nahe kommt, dass die Differenz kleiner ist als eine beliebig angenommene Grösse. Die Reihe

$$\sum_{(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)} e^{G(u_1, \dots u_n; \mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n)}$$

ist also nach dem vorhin Bemerkten in diesem Falle stets divergent.

Wenn dagegen die Grössen c_α sämmtlich negativ sind und diejenige von ihnen, die den kleinsten absoluten Betrag hat, mit c bezeichnet wird, so hat man

$$\chi(\mathfrak{n}_1, \dots \mathfrak{n}_n) \leqq c \sum_\alpha N_\alpha^2,$$

also auch

$$\chi(n_1, \dots n_n) \leqq c \sum_\alpha n_\alpha^2,$$

und somit

$$\left| e^{G(u_1, \dots u_n;\, n_1, \dots n_n)} \right| \leqq e^{U'} \cdot e^{\sum_\alpha (c n_\alpha^2 + 2 n_\alpha U'_\alpha)}.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{(n_1, \dots n_n)} \left\{ e^{\sum_\alpha (c n_\alpha^2 + 2 n_\alpha U'_\alpha)} \right\} = \prod_{\alpha=1}^{n} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{c n^2 + 2 n U'_\alpha}$$

eine endliche Summe hat, so folgt, dass in dem jetzt betrachteten Falle die Reihe

$$\sum_{(n_1, \dots n_n)} e^{G(u_1, \dots u_n;\, n_1, \dots n_n)}$$

für jedes System endlicher Werthe der Grössen $u_1, \dots u_n$ unbedingt convergirt.

Wenn man ferner die Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ auf irgend einen ganz im Endlichen liegenden Bereich beschränkt, so wird dadurch für die absoluten Beträge der Grössen $U'_1, \dots U'_n$, sowie auch für den absoluten Betrag von U' eine obere Grenze bestimmt. Bezeichnet man die erstere mit u_0, die letztere mit U_0, so ist

$$\left| e^{G(u_1, \dots u_n;\, n_1, \dots n_n)} \right| \leqq e^{\sum_\alpha (c |n_\alpha|^2 + 2 |n_\alpha| u_0) + U_0},$$

die Summe von beliebig vielen Gliedern der betrachteten Reihe ihrem absoluten Betrage nach also kleiner als die Summe der entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{(n_1, \dots n_n)} \left\{ e^{\sum_\alpha (c |n_\alpha|^2 + 2 |n_\alpha| u_0) + U_0} \right\}.$$

Da die letztere, nur positive Glieder enthaltende Reihe convergirt, indem ihre Summe kleiner als

$$2^n e^{U_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{c n^2 + 2 n u_0} \right)^n$$

ist, so folgt, dass die Reihe

$$\sum_{(n_1, \dots n_n)} e^{G(u_1, \dots u_n;\, n_1, \dots n_n)}$$

für die dem angenommenen Bereiche angehörigen Werthe von $u_1, \dots u_n$ gleichmässig convergirt, und deshalb die durch sie dargestellte Function

dieser Grössen bei endlichen Werthen derselben den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt.

Hiernach lassen sich die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die betrachtete unendliche Reihe convergire und, wie oben angegeben worden, eine (transcendente) ganze Function der Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ darstelle, folgendermassen aussprechen:

Die im Vorstehenden mit $\chi_1(v_1, \dots v_n)$ bezeichnete quadratische Form

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\Re\left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}\right) v_\alpha v_\beta \quad^*) \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots n)$$

muss so beschaffen sein, dass sie bei reellen Werthen der Grössen $v_1, \dots v_n$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, stets einen negativen Werth hat. Im Übrigen können den Coefficienten der Function $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$ beliebige endliche Werthe gegeben werden.

Bei den folgenden Untersuchungen wird demgemäss von jeder, zur Bildung einer θ-Function verwandten Function $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$ vorausgesetzt, dass ihre Coefficienten den angegebenen Bedingungen entsprechen. Ausserdem aber werde ich noch annehmen, dass die Determinante der im Vorstehenden mit $U_1, \dots U_n$ bezeichneten linearen Functionen von $u_1, \dots u_n$ einen von Null verschiedenen Werth habe,**) und der Function $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$, indem ich die Summe ihrer Glieder zweiten Grades mit

$$g(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$$

bezeichne, fortan die Gestalt

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) = g(u_1, \dots u_n; v_1 + v_1', \dots v_n + v_n') + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (v_\alpha + v_\alpha') + g_0$$

geben, wo $g_0, m_1, \dots m_n, v_1', \dots v_n'$ willkürlich anzunehmende Constanten, d. h. von $u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n$ unabhängige Grössen bedeuten. (Auf diese Form kann man $G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n)$ stets bringen. Man drücke zu dem Ende die

*) Ist a eine Grösse, die einen complexen Werth hat oder haben kann, so wird durch $\Re(a)$ ihr reeller Bestandtheil bezeichnet.

**) Wäre dies nicht der Fall, so liesse sich $\theta(u_1, \dots u_n)$ durch Multiplication mit dem Factor e^{-U} in eine Function von weniger als n Argumenten verwandeln.

Summe der Glieder ersten Grades von U als Function von $U_1, \dots U_n$ aus und nehme v'_α gleich der Hälfte des Coefficienten von U_α, so ist die Differenz

$$G(u_1, \dots u_n; v_1, \dots v_n) - g(u_1, \dots u_n; v_1 + v'_1, \dots v_n + v'_n)$$

von $u_1, \dots u_n$ unabhängig und eine lineare Function von $v_1, \dots v_n$, der man die Gestalt

$$2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (v_\alpha + v'_\alpha) + g_0$$

geben kann.) Dann wird

$$\Theta(u_1, \dots u_n) = C \sum_{(n_1, \dots n_n)} e^{g(u_1, \dots u_n; n_1 + v'_1, \dots n_n + v'_n) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (n_\alpha + v'_\alpha)},$$

wo $C = e^{g_0}$ eine von Null verschiedene Constante ist, der im Folgenden der Werth 1 gegeben wird.

VERALLGEMEINERUNG EINER JACOBI'SCHEN THETAFORMEL.

Für die Θ-Functionen erster Ordnung hat Jacobi das nachstehende Theorem begründet:

Man nehme zwischen acht Veränderlichen

$$t,\ t',\ t'',\ t''',\quad u,\ u',\ u'',\ u'''$$

die folgenden Gleichungen an:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(t+t'+t''+t''') \\ u' &= \tfrac{1}{2}(t+t'-t''-t''') \\ u'' &= \tfrac{1}{2}(t-t'+t''-t''') \\ u''' &= \tfrac{1}{2}(t-t'-t''+t'''); \end{aligned}$$

so gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\Theta(t;\,0,0)\,\Theta(t';\,0,0)\,\Theta(t'';\,0,0)\,\Theta(t''';\,0,0) + \Theta(t;\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(t';\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(t'';\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(t''';\,0,\tfrac{1}{2}) \\ &= \Theta(u;\,0,0)\,\Theta(u';\,0,0)\,\Theta(u'';\,0,0)\,\Theta(u''';\,0,0) + \Theta(u;\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(u';\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(u'';\,0,\tfrac{1}{2})\,\Theta(u''';\,0,\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Der von Jacobi gegebene Beweis dieses Satzes, aus dem er in mehreren Vorlesungen die ganze Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet hat, ist sehr einfach. Es werden in den in der vorstehenden Gleichung vorkommenden vier Producten die Reihen, durch welche ihre Factoren definirt sind, eingesetzt, und durch Ausführung der Multiplicationen beide Seiten der Gleichung in unendliche Reihen verwandelt, von denen dann mit Hülfe der Identität

$$tt + t't' + t''t'' + t'''t''' = uu + u'u' + u''u'' + u'''u'''$$

nachgewiesen wird, dass sie Glied für Glied mit einander übereinstimmen.

Ich will nun zeigen, wie sich in ähnlicher Weise eine sehr allgemeine Relation unter θ-Functionen einer beliebigen Ordnung herleiten lässt.

Es seien $2r+2$ Veränderliche

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(r)},\quad u,\ u',\ \dots\ u^{(r)}$$

durch $r+1$ homogene lineare Gleichungen, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, dergestalt mit einander verbunden, dass unter ihnen auch eine Gleichung

$$(1.)\qquad a_0 tt + a_1 t't' + \dots + a_r t^{(r)} t^{(r)} = b_0 uu + b_1 u'u' + \dots + b_r u^{(r)} u^{(r)}$$

besteht, in der $a_0, a_1, \dots a_r, b_0, b_1, \dots b_r$ rationale und positive Zahlen sind. Dabei wird angenommen, dass sich jene linearen Gleichungen sowohl nach $t, t', \dots t^{(r)}$, als auch nach $u, u', \dots u^{(r)}$ auflösen lassen, so dass man, unter p, q Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots r$ verstehend, setzen kann

$$(2.)\qquad u^{(p)} = \sum_q c_{pq} t^{(q)} = f_p(t, t', \dots t^{(r)}),$$

wo die c_{pq} Constanten bedeuten und $u^{(0)} = u$, $t^{(0)} = t$ zu nehmen ist.

Versteht man unter

$$t_1,\ t_1',\ \dots\ t_1^{(r)},\quad u_1,\ u_1',\ \dots\ u_1^{(r)}$$

Grössen, welche durch dieselben Gleichungen, wie die Grössen

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(r)},\quad u,\ u',\ \dots\ u^{(r)}$$

mit einander verbunden sind, so dass also

$$(3.)\qquad u_1^{(p)} = f_p(t_1, t_1', \dots t_1^{(r)})$$

ist, so hat man

$$\begin{aligned}
\sum_p a_p t^{(p)} t^{(p)} &= \sum_p b_p u^{(p)} u^{(p)},\\
\sum_p a_p t_1^{(p)} t_1^{(p)} &= \sum_p b_p u_1^{(p)} u_1^{(p)},\\
\sum_p a_p (t^{(p)} + t_1^{(p)})^2 &= \sum_p b_p (u^{(p)} + u_1^{(p)})^2,
\end{aligned}$$

und daher auch

$$(4.)\qquad \sum_p a_p t^{(p)} t_1^{(p)} = \sum_p b_p u^{(p)} u_1^{(p)}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich sofort der folgende Satz:

Es sei

$$\varphi(t_1, t_2, \dots t_s)$$

eine ganze und homogene Function zweiten Grades der s Grössen $t_1, t_2, \dots t_s$, so besteht die Gleichung

$$(5.)\qquad \sum_p a_p \varphi(t_1^{(p)}, t_2^{(p)}, \dots t_s^{(p)}) = \sum_p b_p \varphi(u_1^{(p)}, u_2^{(p)}, \dots u_s^{(p)}),$$

wenn unter den $2s(r+1)$ Grössen (t, u) die $s(r+1)$ Gleichungen

$$(6.)\qquad \left\{\begin{array}{lll} u_1 = f_0(t_1, t'_1, \dots t_1^{(r)}), & \dots & u_1^{(r)} = f_r(t_1, t'_1, \dots t_1^{(r)}) \\ u_2 = f_0(t_2, t'_2, \dots t_2^{(r)}), & \dots & u_2^{(r)} = f_r(t_2, t'_2, \dots t_2^{(r)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_s = f_0(t_s, t'_s, \dots t_s^{(r)}), & \dots & u_s^{(r)} = f_r(t_s, t'_s, \dots t_s^{(r)}) \end{array}\right.$$

angenommen werden.

Aus der Gleichung (4.) ergiebt sich

$$\sum_q a_q t^{(q)} t_1^{(q)} = \sum_{p,q} b_p u^{(p)} c_{pq} t_1^{(q)},$$

woraus, wenn man

$$(7.)\qquad f'_q(u, u', \dots u^{(r)}) = \sum_p c_{pq} u^{(p)}$$

setzt,

$$(8.)\qquad t^{(q)} = \frac{1}{a_q} f'_q(b_0 u, b_1 u', \dots b_r u^{(r)})$$

folgt.

Setzt man ferner in (2.)

$$a_p t^{(p)} = v^{(p)}, \quad b_p u^{(p)} = w^{(p)},$$

so sind die Grössen $v, v', \dots v^{(r)}, w, w', \dots w^{(r)}$ durch die Gleichungen

$$(9.)\qquad w^{(p)} = b_p f_p\left(\frac{v}{a_0}, \frac{v'}{a_1}, \dots \frac{v^{(r)}}{a_r}\right),$$

sowie auch durch die aus (8.) sich ergebenden

$$(10.)\qquad v^{(q)} = f'_q(w, w', \dots w^{(r)})$$

mit einander verbunden, und man erhält unter den $4(r+1)$ Grössen (t, u, v, w) aus (4.) die Gleichung

$$\sum_p t^{(p)} v^{(p)} = \sum_p u^{(p)} w^{(p)}. \tag{11.}$$

Jetzt nehme man zwischen $3\varrho(r+1)$ Grössen

$$\begin{array}{llll} t_1, \dots t_\varrho, & l_1, \dots l_\varrho, & k_1, \dots k_\varrho, \\ t'_1, \dots t'_\varrho, & l'_1, \dots l'_\varrho, & k'_1, \dots k'_\varrho, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ t_1^{(r)}, \dots t_\varrho^{(r)}, & l_1^{(r)}, \dots l_\varrho^{(r)}, & k_1^{(r)}, \dots k_\varrho^{(r)} \end{array}$$

und ebenso vielen anderen

$$\begin{array}{llll} u_1, \dots u_\varrho, & n_1, \dots n_\varrho, & m_1, \dots m_\varrho, \\ u'_1, \dots u'_\varrho, & n'_1, \dots n'_\varrho, & m'_1, \dots m'_\varrho, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ u_1^{(r)}, \dots u_\varrho^{(r)}, & n_1^{(r)}, \dots n_\varrho^{(r)}, & m_1^{(r)}, \dots m_\varrho^{(r)} \end{array}$$

die nachstehenden Gleichungen an:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)}\ u_\alpha^{(p)} = f_p(t_\alpha, t'_\alpha, \dots t_\alpha^{(r)}) & = \sum_q c_{pq} t_\alpha^{(q)} & \\ \text{(b)}\ n_\alpha^{(p)} = f_p(l_\alpha, l'_\alpha, \dots l_\alpha^{(r)}) & = \sum_q c_{pq} l_\alpha^{(q)} & \left(\begin{smallmatrix}\alpha = 1, \dots \varrho \\ p, q = 1, \dots r\end{smallmatrix}\right) \\ \text{(c)}\ m_\alpha^{(p)} = b_p f_p\left(\frac{k_\alpha}{a_0}, \frac{k'_\alpha}{a_1}, \dots \frac{k_\alpha^{(r)}}{a_r}\right) & = b_p \sum_q \frac{c_{pq}}{a_q} k_\alpha^{(q)}; & \end{array}\right. \tag{12.}$$

so hat man auch

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)}\ t_\alpha^{(q)} = \frac{1}{a_q} f'_q(b_0 u_\alpha, b_1 u'_\alpha, \dots b_r u_\alpha^{(r)}) & = \frac{1}{a_q} \sum_p b_p c_{pq} u_\alpha^{(p)} \\ \text{(b)}\ l_\alpha^{(q)} = \frac{1}{a_q} f'_q(b_0 n_\alpha, b_1 n'_\alpha, \dots b_r n_\alpha^{(r)}) & = \frac{1}{a_q} \sum_p b_p c_{pq} n_\alpha^{(p)} \\ \text{(c)}\ k_\alpha^{(q)} = f'_q(m_\alpha, m'_\alpha, \dots m_\alpha^{(r)}) & = \sum_p c_{pq} m_\alpha^{(p)}, \end{array}\right. \tag{13.}$$

und man erhält aus (5.) und (11.), wenn $G(u_1, \dots u_\varrho, n_1, \dots n_\varrho)$ irgend eine ganze und homogene Function zweiten Grades der Grössen $u_1, \dots u_\varrho, n_1, \dots n$ ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sum_p a_p G(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}, l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}) = \sum_p b_p G(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}, n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}), \tag{14.}$$

$$\sum_p k_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)} = \sum_p m_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}. \tag{15.}$$

Setzt man also

$$(16.)\quad g(u_1, \dots u_\varrho, m_1, \dots m_\varrho, n_1, \dots n_\varrho) = G(u_1, \dots u_\varrho, n_1, \dots n_\varrho) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\varrho} m_\alpha n_\alpha,$$

so besteht die Gleichung

$$(17.)\quad \begin{aligned} &\sum_p a_p\, g\left(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}, \frac{k_1^{(p)}}{a_p}, \dots \frac{k_\varrho^{(p)}}{a_p}, l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}\right) \\ &= \sum_p b_p\, g\left(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}, \frac{m_1^{(p)}}{b_p}, \dots \frac{m_\varrho^{(p)}}{b_p}, n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}\right). \end{aligned}$$

Man bestimme nunmehr, unter c die kleinste positive ganze Zahl verstehend, mit welcher multiplicirt die Coefficienten c_{pq} der Functionen

$$f_p(t, t', \dots t^{(r)})$$

sämmtlich ganze Zahlen werden, für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \dots (c-1)$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots \mathfrak{l}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$f_0(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots \mathfrak{l}^{(r)}),\ f_1(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots \mathfrak{l}^{(r)}),\ \dots\ f_r(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots \mathfrak{l}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit N bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\nu}, \overset{1}{\nu}', \dots \overset{1}{\nu}^{(r)}),\ (\overset{2}{\nu}, \overset{2}{\nu}', \dots \overset{2}{\nu}^{(r)}),\ \text{u. s. w.}$$

Ist d die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \dots 0)$ liefern, so ist die Anzahl der verschiedenen in N enthaltenen Restsysteme gleich $\frac{c^{r+1}}{d}$.

Ebenso bestimme man, unter c' die kleinste positive ganze Zahl verstehend, mit der multiplicirt die Coefficienten $\frac{c_{pq} b_p}{a_q}$ der Functionen

$$\frac{1}{a_q} f_q'(b_0 u, b_1 u', \dots b_r u^{(r)})$$

sämmtlich ganze Zahlen werden, für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \dots (c'-1)$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \dots \mathfrak{n}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$\frac{1}{a_0} f_0'(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \dots b_r \mathfrak{n}^{(r)}),\ \frac{1}{a_1} f_1'(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \dots b_r \mathfrak{n}^{(r)}),\ \dots\ \frac{1}{a_r} f_r'(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \dots b_r \mathfrak{n}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen, so sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit L bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\lambda}, \overset{1}{\lambda}', \ldots \overset{1}{\lambda}^{(r)}),\ (\overset{2}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}', \ldots \overset{2}{\lambda}^{(r)}),\ \text{u. s. w.}$$

Ihre Anzahl ist $\frac{c^{r+1}}{d'}$.

Nun sei $\lambda, \lambda', \ldots \lambda^{(r)}$ ein beliebiges Restsystem aus dem Complexe L und $\bar{\imath}, \bar{\imath}', \ldots \bar{\imath}^{(r)}$ irgend ein System von $r+1$ ganzen Zahlen. Dann kann man die Zahlen $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \ldots \mathfrak{u}^{(r)}$ so annehmen, dass, wenn

$$\frac{1}{a_q} f_q'(b_0\mathfrak{u}, b_1\mathfrak{u}', \ldots b_r\mathfrak{u}^{(r)}) = \mathfrak{L}^{(q)} \qquad (q = 0, 1, \ldots r)$$

wird, die Differenzen $\mathfrak{L}^{(q)} - \lambda^{(q)}$ ganze Zahlen sind, und erhält aus diesen Gleichungen

$$\mathfrak{u}^{(p)} = f_p(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \ldots \mathfrak{L}^{(r)}) \qquad (p = 0, 1, \ldots r).$$

Setzt man nun

$$\bar{\imath}^{(p)} - \mathfrak{L}^{(p)} + \lambda^{(p)} = \imath^{(p)}$$

und versteht unter $(\nu, \nu', \ldots \nu^{(r)})$ das dem Zahlensystem $(\imath, \imath', \ldots \imath^{(r)})$ entsprechende Restsystem des Complexes N, so ist

$$f_p(\bar{\imath} - \mathfrak{L} + \lambda, \bar{\imath}' - \mathfrak{L}' + \lambda', \ldots \bar{\imath}^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)} + \lambda^{(r)}) = \nu^{(p)} + \text{einer ganzen Zahl},$$

und somit

$$f_p(\bar{\imath} + \lambda, \bar{\imath}' + \lambda', \ldots \bar{\imath}^{(r)} + \lambda^{(r)}) = \nu^{(p)} + \bar{\mathfrak{u}}^{(p)}, \qquad (p = 0, 1, \ldots r)$$

wo die $\bar{\mathfrak{u}}^{(p)}$ ganze Zahlen sind. Es lässt sich also jedem Werthsystem

$$(\bar{\imath}, \bar{\imath}', \ldots \bar{\imath}^{(r)},\ \lambda, \lambda', \ldots \lambda^{(r)}),$$

in welchem $\bar{\imath}, \bar{\imath}', \ldots \bar{\imath}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, ein Werthsystem

$$(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{u}}', \ldots \bar{\mathfrak{u}}^{(r)},\ \nu, \nu', \ldots \nu^{(r)}),$$

in welchem $\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{u}}', \ldots \bar{\mathfrak{u}}^{(r)}$ ebenfalls ganze Zahlen sind, so zuordnen, dass die $r+1$ Gleichungen

$$f_p(\lambda + \bar{\imath}, \lambda' + \bar{\imath}', \ldots \lambda^{(r)} + \bar{\imath}^{(r)}) = \nu^{(p)} + \bar{\mathfrak{u}}^{(p)}$$

bestehen.

Ebenso lässt sich zeigen, dass jedem Werthsystem

$$(\overline{\mathfrak{n}}, \overline{\mathfrak{n}}', \dots \overline{\mathfrak{n}}^{(r)}, \nu, \nu', \dots \nu^{(r)}),$$

wo $(\nu, \nu', \dots \nu^{(r)})$ ein Restsystem des Complexes N ist, und $\overline{\mathfrak{n}}, \overline{\mathfrak{n}}', \dots \overline{\mathfrak{n}}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, ein Werthsystem

$$(\overline{\mathfrak{l}}, \overline{\mathfrak{l}}', \dots \overline{\mathfrak{l}}^{(r)}, \lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)})$$

entspricht, in welchem $\overline{\mathfrak{l}}, \overline{\mathfrak{l}}', \dots \overline{\mathfrak{l}}^{(r)}$ ganze Zahlen sind, während $\lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)}$ ein Restsystem des Complexes L bilden.

Nunmehr seien

$$(\lambda_1, \lambda_1', \dots \lambda_1^{(r)}), (\lambda_2, \lambda_2', \dots \lambda_2^{(r)}), \dots (\lambda_\varrho, \lambda_\varrho', \dots \lambda_\varrho^{(r)})$$

irgend ϱ Restsysteme des Complexes L, unter denen sich auch gleiche finden dürfen, und

$$(\overline{\mathfrak{l}}_1, \overline{\mathfrak{l}}_1', \dots \overline{\mathfrak{l}}_1^{(r)}), (\overline{\mathfrak{l}}_2, \overline{\mathfrak{l}}_2', \dots \overline{\mathfrak{l}}_2^{(r)}), \dots (\overline{\mathfrak{l}}_\varrho, \overline{\mathfrak{l}}_\varrho', \dots \overline{\mathfrak{l}}_\varrho^{(r)})$$

ϱ Systeme ganzer Zahlen. Dann setze man in dem Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (17.) für $l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}$

$$l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)} + \overline{\mathfrak{l}}_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)} + \overline{\mathfrak{l}}_\varrho^{(p)}$$

und bezeichne mit $\overline{\mathfrak{N}}_1^{(p)}, \dots \overline{\mathfrak{N}}_\varrho^{(p)}$ die dadurch hervorgebrachten Änderungen von $n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}$, setze also

$$\overline{\mathfrak{N}}_\alpha^{(p)} = f_p(\lambda_\alpha + \overline{\mathfrak{l}}_\alpha, \lambda_\alpha' + \overline{\mathfrak{l}}_\alpha', \dots \lambda_\alpha^{(r)} + \overline{\mathfrak{l}}_\alpha^{(r)}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots \varrho \\ p = 0, \dots r \end{pmatrix}.$$

Dann kann man für jeden Werth von α ein dem Complex N angehöriges Restsystem $(\nu_\alpha, \nu_\alpha', \dots \nu_\alpha^{(r)})$ und $r+1$ ganze Zahlen $\overline{\mathfrak{n}}_\alpha, \overline{\mathfrak{n}}_\alpha', \dots \overline{\mathfrak{n}}_\alpha^{(r)}$ so bestimmen, dass

$$\overline{\mathfrak{N}}_\alpha^{(p)} = \nu_\alpha^{(p)} + \overline{\mathfrak{n}}_\alpha^{(p)}$$

wird. Folglich ist

$$\begin{aligned} &\sum_p a_p g\left(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}, \frac{k_1^{(p)}}{a_1}, \dots \frac{k_\varrho^{(p)}}{a_\varrho}, l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)} + \overline{\mathfrak{l}}_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)} + \overline{\mathfrak{l}}_\varrho^{(p)}\right) \\ &= \sum_p b_p g\left(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}, \frac{m_1^{(p)}}{b_1}, \dots \frac{m_\varrho^{(p)}}{b_\varrho}, n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)} + \overline{\mathfrak{n}}_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)} + \overline{\mathfrak{n}}_\varrho^{(p)}\right). \end{aligned} \tag{18.}$$

In dieser Gleichung lege man den Grössen $t_\alpha^{(p)}, k_\alpha^{(p)}, l_\alpha^{(p)}$ irgend welche bestimmte Werthe und den Grössen $u_\alpha^{(p)}, m_\alpha^{(p)}, n_\alpha^{(p)}$ die ihnen nach (12.) entsprechenden

Werthe bei. Nach den obigen Auseinandersetzungen ist dann die Gesammtheit der Werthe, welche der Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung unter der Bedingung annehmen kann, dass

$$(\bar{l}_1, \bar{l}'_1, \dots \bar{l}^{(r)}_1), \dots (\bar{l}_\varrho, \bar{l}'_\varrho, \dots \bar{l}^{(r)}_\varrho)$$

ganze Zahlen und jedes der ϱ Systeme

$$(\lambda_1, \lambda'_1, \dots \lambda^{(r)}_1), \dots (\lambda_\varrho, \lambda'_\varrho, \dots \lambda^{(r)}_\varrho)$$

ein Restsystem des Complexes L sein soll, identisch mit der Gesammtheit der Werthe, welche der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung unter der Bedingung annehmen kann, dass auch

$$(\bar{n}_1, \bar{n}'_1, \dots \bar{n}^{(r)}_1), \dots (\bar{n}_\varrho, \bar{n}'_\varrho, \dots \bar{n}^{(r)}_\varrho)$$

ganze Zahlen, und jedes der ϱ Systeme

$$(\nu_1, \nu'_1, \dots \nu^{(r)}_1), \dots (\nu_\varrho, \nu'_\varrho, \dots \nu^{(r)}_\varrho)$$

ein Restsystem des Complexes N sein soll.

Nun setze man

$$\Theta(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = \sum_{(\bar{n})} e^{g(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1 + \bar{n}_1, \dots n_\varrho + \bar{n}_\varrho)}$$

und, falls a eine rationale und positive Zahl ist,

$$\overset{(a)}{\Theta}(u_1, \dots u_\varrho; m_1, \dots m_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = \sum_{(\bar{n})} e^{ag\left(u_1, \dots u_\varrho; \frac{m_1}{a}, \dots \frac{m_\varrho}{a}; n_1 + \bar{n}_1, \dots n_\varrho + \bar{n}_\varrho\right)}.$$

Dann folgt aus den obigen Erörterungen die Gleichung

$$\text{(I.)} \quad \begin{aligned} &\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_{p=0}^{p=r} \overset{(a_p)}{\Theta}(l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)}) \right\} \\ &= \sum_{(\nu)} \left\{ \prod_{p=0}^{p=r} \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)}) \right\}. \end{aligned}$$

Das Summenzeichen $\sum_{(\lambda)}$ hat hier folgende Bedeutung: Es sind für

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_\varrho, \dots \lambda^{(r)}_1, \lambda^{(r)}_2, \dots \lambda^{(r)}_\varrho$$

alle Systeme von $\varrho(r+1)$ rationalen Zahlen zu setzen, welche der Bedingung

genügen, dass für jeden Index α

$$(\lambda_\alpha, \lambda'_\alpha, \dots \lambda_\alpha^{(r)})$$

ein Restsystem des Complexes L sein muss. Das Zeichen $\sum_{(r)}$ hat dieselbe Bedeutung in Beziehung auf die Restsysteme des Complexes N.

Aus der vorstehenden Gleichung (I.), welche der angeführten Jacobi'schen ganz analog ist, lassen sich nun noch eine Reihe von anderen Gleichungen ableiten.

2.

Man setze, unter

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}'_1, \dots \mathfrak{k}_1^{(r)}, \dots \mathfrak{k}_\varrho, \mathfrak{k}'_\varrho, \dots \mathfrak{k}_\varrho^{(r)}$$

ganze Zahlen verstehend, in dem Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (I.)

$$k_1^{(p)} + \mathfrak{k}_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)} + \mathfrak{k}_\varrho^{(p)} \quad \text{für} \quad k_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)}.$$

Auf der rechten Seite hat man dann

$$m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mathfrak{M}_\varrho^{(p)} \quad \text{für} \quad m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)}$$

zu substituiren, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} = b_p f_p\left(\frac{\mathfrak{k}_\alpha}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'_\alpha}{a_1}, \cdots \frac{\mathfrak{k}_\alpha^{(r)}}{a_r}\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots \varrho \\ p = 0, 1, \dots r \end{pmatrix} \tag{19.}$$

gesetzt wird. Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)} + \mathfrak{k}_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) = \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)}(l_\alpha^{(p)} + \lambda_\alpha^{(p)})}$$

erhält man also aus (I.)

$$\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_p \overset{(a_p)}{\Theta}(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right\}$$

$$= \sum_{(\nu)} \left\{ \prod_p \overset{(b_p)}{\Theta}(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} \right\}.$$

Aus den Gleichungen (9.), (10.), (11.) aber ergiebt sich, wenn man in denselben

$$l_\alpha, l'_\alpha, \dots l_\alpha^{(r)} \quad \text{für} \quad t, t', \dots t^{(r)}$$

und

$$\mathfrak{k}_\alpha, \mathfrak{k}'_\alpha, \dots \mathfrak{k}_\alpha^{(r)} \quad \text{für} \quad v, v', \dots v^{(r)}$$

setzt, wodurch $u^{(p)}$ in $n_\alpha^{(p)}$ und $w^{(p)}$ in $\mathfrak{M}_\alpha^{(p)}$ übergeht,

$$\sum_p \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}, \tag{20.}$$

woraus

$$\prod_p e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} = \prod_p e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}}$$

folgt. Es ist also

$$\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_p {}^{(a_p)}\Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right\}$$
$$= \sum_{(\nu)} \left\{ \prod_p {}^{(b_p)}\Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung gehen, wenn man für das mit $(\mathfrak{k})$ zu bezeichnende System von Zahlen

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}'_1, \dots \mathfrak{k}_1^{(r)}, \dots \mathfrak{k}_\varrho, \mathfrak{k}'_\varrho, \dots \mathfrak{k}_\varrho^{(r)}$$

alle Verbindungen von $\varrho(r+1)$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots c'-1$ setzt, $c'^{\varrho(r+1)}$ Gleichungen hervor, die durch Addition vereinigt werden mögen. So ergiebt sich

$$\sum_{(\lambda)} \left\{ \prod_p {}^{(a_p)}\Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots) \sum_{\mathfrak{k}} \left(\prod_p e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right) \right\}$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{k})} \left\{ \prod_p {}^{(b_p)}\Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}. \tag{21.}$$

Nun ist

$$\sum_{(\mathfrak{k})} \left(\prod_p e^{2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right) = \sum_{\mathfrak{k}} \prod_{p,\alpha} e^{2\pi i \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} = \prod_{(p,\alpha)} \left(\sum_{\mathfrak{k}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{k} \lambda_\alpha^{(p)}} \right).$$

Nach der Definition der Grössen $\lambda_\alpha^{(p)}$ aber ist $0 \leqq \lambda_\alpha^{(p)} < 1$ und zugleich $c'\lambda_\alpha^{(p)}$ eine ganze Zahl, also

$$\sum_{\mathfrak{k}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{k} \lambda_\alpha^{(p)}} = \begin{cases} c', & \text{wenn } \lambda_\alpha^{(p)} = 0 \\ 0 \text{ in jedem anderen Falle.} \end{cases}$$

Folglich hat

$$\prod_{(p,\alpha)} \sum_{\mathfrak{k}=0}^{c'-1} e^{2\pi i \mathfrak{k} \lambda_\alpha^{(p)}}$$

nur, wenn die Grössen

$$\lambda_1, \lambda'_1, \dots \lambda_1^{(r)}, \dots \lambda_\varrho, \lambda'_\varrho, \dots \lambda_\varrho^{(r)}$$

sämmtlich gleich Null sind, einen von Null verschiedenen Werth, der dann gleich $c'^{\varrho(r+1)}$ ist.

Hiernach ergiebt sich aus (21.)

II.)
$$c'^{\varrho(r+1)} \prod_p^{(a_p)} \Theta(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)})$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{k})} \left\{ \prod_p^{(b_p)} \Theta(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mathfrak{M}_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \right\}.$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich in manchen Fällen in eine andere, die eine geringere Anzahl von Gliedern hat, verwandeln. Es sei $\mu_\alpha^{(p)}$ der Rest, welcher bleibt, wenn man von der Grösse $\mathfrak{M}_\alpha^{(p)}$ die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl abzieht, und

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} = \mu_\alpha^{(p)} + \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)}.$$

Dann kann man die vorstehende Gleichung so schreiben:

(22.)
$$c'^{\varrho(r+1)} \prod_p^{(a_p)} \Theta(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \dots; l_1^{(p)}, \dots)$$
$$= \sum_{(\nu)} \sum_{(\mathfrak{k})} \left\{ \prod_p^{(b_p)} \Theta(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mu_1^{(p)}, \dots; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \dots) e^{-2\pi i \sum_\alpha (\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} - \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} (n_\alpha^{(p)} + \nu_\alpha^{(p)}))} \right\}.$$

Man kann nun für jedes Restsystem $(\nu_\alpha, \nu'_\alpha, \dots \nu_\alpha^{(r)})$ ein System ganzer Zahlen

$$(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}'_\alpha, \dots \mathfrak{l}_\alpha^{(r)})$$

so bestimmen, dass die $r+1$ Gleichungen

(23.)
$$\mathfrak{N}_\alpha^{(p)} = f_p(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}'_\alpha, \dots \mathfrak{l}_\alpha^{(r)}) \qquad (p = 0, 1, \dots r)$$

bestehen, und dass die Differenzen $\mathfrak{N}_\alpha^{(p)} - \nu_\alpha^{(p)}$ ganze Zahlen werden. Dann ist nach (11.)

(24.)
$$\sum_p \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{k}_\alpha^{(p)} \mathfrak{l}_\alpha^{(p)}$$

und somit

$$e^{2\pi i \sum_{p,\alpha} (\overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} + \mu_\alpha^{(p)}) \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}} = 1,$$

$$e^{2\pi i \sum_{p,\alpha} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} \nu_\alpha^{(p)}} = e^{2\pi i \sum_{p,\alpha} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}} = e^{-2\pi i \sum_{p,\alpha} \mu_\alpha^{(p)} \mathfrak{N}_\alpha^{(p)}},$$

$$e^{-2\pi i \sum_{p,\alpha} (\mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} - \overline{\mathfrak{m}}_\alpha^{(p)} (n_\alpha^{(p)} + \nu_\alpha^{(p)}))} = e^{-2\pi i \sum_{p,\alpha} \mu_\alpha^{(p)} (n_\alpha^{(p)} + \mathfrak{N}_\alpha^{(p)})}.$$

Die Coefficienten $\frac{c_{pq} b_p}{a_q}$ der $r+1$ Functionen $b_p f_p\left(\frac{v}{a_0}, \frac{v'}{a_1}, \cdots \frac{v^{(r)}}{a_r}\right)$ verwandeln sich in ganze Zahlen, wenn sie mit c' multiplicirt werden. Man bestimme daher für jedes System von $r+1$ ganzen, der Reihe $0, 1, \ldots c'-1$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}', \ldots \mathfrak{k}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$b_0 f_0\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \cdots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right), \quad b_1 f_1\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \cdots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right), \quad \ldots \quad b_r f_r\left(\frac{\mathfrak{k}}{a_0}, \frac{\mathfrak{k}'}{a_1}, \cdots \frac{\mathfrak{k}^{(r)}}{a_r}\right)$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit M bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\mu}, \overset{1}{\mu}', \ldots \overset{1}{\mu}^{(r)}), \ (\overset{2}{\mu}, \overset{2}{\mu}', \ldots \overset{2}{\mu}^{(r)}), \ \ldots .$$

Ist d'' die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \ldots 0)$ liefern, so ist die Anzahl der verschiedenen in M enthaltenen Restsysteme $g = \frac{c'^{r+1}}{d''}$. Dann kommt auch jedes andere System d'' mal vor. In der Gleichung (22.) sind daher in der $\sum_{(t)}$ je d''^{ϱ} Glieder einander gleich, und folglich ist

(IIa.)
$$g^{\varrho} \prod_p {}^{(a_p)}\Theta(t_1^{(p)}, \ldots t_\varrho^{(p)}; k_1^{(p)}, \ldots k_\varrho^{(p)}; l_1^{(p)}, \ldots l_\varrho^{(p)})$$
$$= \sum_{(v)} \sum_{(u)} \left\{ \prod_p {}^{(b_p)}\Theta(u_1^{(p)}, \ldots u_\varrho^{(p)}; m_1^{(p)} + \mu_1^{(p)}, \ldots m_\varrho^{(p)} + \mu_\varrho^{(p)}; n_1^{(p)} + \nu_1^{(p)}, \ldots n_\varrho^{(p)} + \nu_\varrho^{(p)}) e^{-2\pi i \sum_\alpha \mu_\alpha^{(p)} (n_\alpha^{(p)} + \mathfrak{N}_\alpha^{(p)})} \right\}.$$

Genau in derselben Weise gelangt man, indem man in der obigen Deduction die beiden Seiten der Gleichung (I.) vertauscht, zu einer dritten Relation. Es sei $(\mathfrak{m})$ das System der Zahlen

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1', \ldots \mathfrak{m}_1^{(r)}, \ \ldots \ \mathfrak{m}_\varrho, \mathfrak{m}_\varrho', \ldots \mathfrak{m}_\varrho^{(r)}.$$

Für jede dieser $\varrho(r+1)$ Zahlen sind die Werthe $0, 1, \ldots c-1$ zu setzen, so

dass (m) im ganzen $c^{\varrho(r+1)}$ Systeme von Zahlen durchläuft. Es sei ferner

$$\mathfrak{K}_\alpha^{(p)} = f_p'(\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_\alpha', \dots \mathfrak{m}_\alpha^{(r)}). \tag{25.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &c^{\varrho(r+1)} \prod_p^{(b_p)} \Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}) \\ &= \sum_{(\lambda)} \sum_{(\mathfrak{m})} \left\{ \prod_p^{(a_p)} \Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)} + \mathfrak{K}_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)} + \mathfrak{K}_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} \lambda_\alpha^{(p)}} \right\}. \end{aligned} \tag{III.}$$

Man bestimme nun für jedes System von $r+1$ ganzen der Reihe $0, 1, \dots c-1$ entnommenen Zahlen $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}$ die Reste, welche bleiben, wenn man von jeder der Grössen

$$f_0'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}),\ f_1'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)}),\ \dots\ f_r'(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \dots \mathfrak{m}^{(r)})$$

die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl subtrahirt. Die verschiedenen auf diese Weise sich ergebenden Restsysteme, deren Complex mit K bezeichnet werde, seien

$$(\overset{1}{\mathfrak{x}}, \overset{1}{\mathfrak{x}}', \dots \overset{1}{\mathfrak{x}}^{(r)}),\ (\overset{2}{\mathfrak{x}}, \overset{2}{\mathfrak{x}}', \dots \overset{2}{\mathfrak{x}}^{(r)}),\ \dots .$$

Ist d''' die Anzahl derjenigen Systeme, welche das Restsystem $(0, 0, \dots 0)$ liefern, so kommt auch jedes andere Restsystem d''' mal vor, und die Anzahl der verschiedenen in K enthaltenen Restsysteme ist $h = \frac{c^{r+1}}{d'''}$. Dann ist

$$\begin{aligned} &h^\varrho \prod_p^{(b_p)} \Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)}) \\ &= \sum_{(\lambda)} \sum_{(\mathfrak{x})} \left\{ \prod_p^{(a_p)} \Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)} + \mathfrak{x}_1^{(p)}, \dots k_\varrho^{(p)} + \mathfrak{x}_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)} + \lambda_1^{(p)}, \dots l_\varrho^{(p)} + \lambda_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{x}_\alpha^{(p)} (\lambda_\alpha^{(p)} + \mathfrak{L}_\alpha^{(p)})} \right\}. \end{aligned} \tag{IIIa.}$$

Die hier auftretenden Grössen $\mathfrak{L}_\alpha^{(p)}$ sind so zu wählen, dass die Differenzen $\mathfrak{L}_\alpha^{(p)} - \lambda_\alpha^{(p)}$ ganze Zahlen werden, und dass

$$\mathfrak{L}_\alpha^{(p)} = \frac{1}{a_p} f_p'(b_0 \mathfrak{n}, b_1 \mathfrak{n}', \dots b_r \mathfrak{n}^{(r)}) \tag{26.}$$

wird, wo $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \dots \mathfrak{n}^{(r)}$ ganze Zahlen sind. Daraus folgt, dass

$$\sum_p \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} \mathfrak{L}_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \mathfrak{n}_\alpha^{(p)}$$

eine ganze Zahl ist.

Nun lässt sich aber auch dieselbe Betrachtung, durch welche eben die Gleichungen (III.) und (IIIa.) aus (I.) abgeleitet wurden, auf die Gleichung (II.) anwenden und führt dann zu der Relation

$$\text{(IV.)}\quad \begin{aligned} &c'^{\varrho(r+1)} \sum_{(\mathfrak{m})} \Big\{ \prod_p {}^{(a_p)}\Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)} + \mathfrak{K}_1^{(p)}, \dots\ k_\varrho^{(p)} + \mathfrak{K}_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)}, \dots\ l_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} \Big\} \\ &= c^{\varrho(r+1)} \sum_{(\mathfrak{k})} \Big\{ \prod_p {}^{(b_p)}\Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)} + \mathfrak{M}_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mathfrak{M}_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \Big\}, \end{aligned}$$

und da hier jedes Glied auf der rechten Seite $d'^{r\varrho}$ mal, auf der linken $d'^{r'\varrho}$ mal vorkommt,

$$\text{(IVa.)}\quad \begin{aligned} &g^\varrho \sum_{(\varkappa)} \Big\{ \prod_p {}^{(a_p)}\Theta\,(t_1^{(p)}, \dots t_\varrho^{(p)};\ k_1^{(p)} + \varkappa_1^{(p)}, \dots\ k_\varrho^{(p)} + \varkappa_\varrho^{(p)};\ l_1^{(p)}, \dots\ l_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \varkappa_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}} \Big\} \\ &= h^\varrho \sum_{(\mu)} \Big\{ \prod_p {}^{(b_p)}\Theta\,(u_1^{(p)}, \dots u_\varrho^{(p)};\ m_1^{(p)} + \mu_1^{(p)}, \dots m_\varrho^{(p)} + \mu_\varrho^{(p)};\ n_1^{(p)}, \dots n_\varrho^{(p)})\, e^{-2\pi i \sum_\alpha \mu_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)}} \Big\}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung ist die der Gleichung (20.) analoge Gleichung

$$\text{(27.)}\qquad \sum_p \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} n_\alpha^{(p)} = \sum_p \mathfrak{K}_\alpha^{(p)} l_\alpha^{(p)}$$

zu benutzen. Zur besseren Übersicht der angewandten Bezeichnungen füge ich noch folgende Bemerkung hinzu: Jedes der vier Systeme von Grössen

$$t_\alpha^{(p)},\quad l_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{l}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{L}_\alpha^{(p)}$$

hängt mit dem entsprechenden der vier Systeme

$$u_\alpha^{(p)},\quad n_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{N}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{n}_\alpha^{(p)}$$

durch die nämlichen linearen Gleichungen zusammen; ebenso jedes der vier Systeme

$$v_\alpha^{(p)},\quad k_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{k}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{K}_\alpha^{(p)}$$

mit dem entsprechenden der vier Systeme

$$w_\alpha^{(p)},\quad m_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{M}_\alpha^{(p)},\quad \mathfrak{m}_\alpha^{(p)}.$$

Diese linearen Gleichungen sind so beschaffen, dass aus ihnen die Gleichung (11.) folgt, also auch die Gleichungen (15.), (20.), (24.) und (27.). Jede der

ganzen Zahlen

$$\mathfrak{l}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{m}_\alpha^{(p)} \text{ bewegt sich von } 0 \text{ bis } c-1$$
$$\mathfrak{k}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{n}_\alpha^{(p)} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 0 \text{ bis } c'-1.$$

Für einen bestimmten Werth von α nehmen die von ihnen linear abhängenden Systeme rationaler Zahlen

$$\mathfrak{K}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{L}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{M}_\alpha^{(p)},\ \mathfrak{N}_\alpha^{(p)} \qquad (p = 0, 1, \dots r)$$

die beiden mittleren c^{r+1}, die beiden äusseren c'^{r+1} Systeme von Werthen an. Zieht man von jeder derselben die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl ab, so erhält man die positiven echten Brüche

$$\varkappa_\alpha^{(p)},\ \lambda_\alpha^{(p)},\ \mu_\alpha^{(p)},\ \nu_\alpha^{(p)}$$

und zwar jedes System dieser Brüche

$$d''',\ d',\ d'',\ d$$

mal.

ANMERKUNG.

Specielle Fälle der im Vorstehenden entwickelten Gleichungen (I.), (II.), (III.), (IV.) sind bereits von Anderen, namentlich von Herrn Prym, behandelt worden. Ich habe meine Abhandlung bereits vor einer Reihe von Jahren der Akademie vorgelegt, dieselbe konnte jedoch damals wegen typographischer Schwierigkeiten nicht veröffentlicht werden. Ich möchte aber noch bemerken, dass die Gleichungen (II.), (III.), (IV.) aus der Gleichung (I.) auch dadurch erhalten werden können, dass man die darin vorkommenden Argumente um gewisse Constanten (halbe Perioden der zu den vorkommenden Θ-Functionen gehörenden Abelschen Integrale erster Art) vermehrt, wie dies in dem Falle $n = 1$ von Jacobi geschehen ist, während bei meiner Ableitung die Kenntniss jener Constanten nicht erforderlich ist.

NACHTRAG ZU DER AM 4. MÄRZ 1858 IN DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN GELESENEN ABHANDLUNG: ÜBER EIN DIE HOMOGENEN FUNCTIONEN ZWEITEN GRADES BETREFFENDES THEOREM.*)

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 3. Mai 1879.)

In der genannten Abhandlung habe ich den folgenden Satz begründet: »Sind $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, $\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ ganze homogene Functionen zweiten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und ist die erstere überdies so beschaffen, dass sie für reelle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält und nur in dem Falle, wo diese sämmtlich gleich Null sind, verschwindet; so lassen sich stets n homogene lineare Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ von $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und n reelle Constanten $s_1, s_2, \dots s_n$ so bestimmen, dass

$$\pm\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2,$$
$$\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = s_1 u_1^2 + s_2 u_2^2 + \dots + s_n u_n^2$$

ist.« (In der ersten Gleichung gilt das obere oder das untere Zeichen, jenachdem φ bei reellen Werthen von $x_1, x_2, \dots x_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv oder beständig negativ ist.)

Dieser Satz — den ich später (Monatsberichte v. J. 1868, S. 310 ff.**)) als ein einfaches Corollar der a. a. O. von mir gegebenen allgemeinen Theorie der simultanen Transformation zweier bilinearen oder quadratischen Formen abgeleitet habe — war von Cauchy und Jacobi nur für den Fall, dass unter den als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades sich ergebenden Constanten

*) [Bd. I, S. 233 dieser Ausgabe.]

**) [Bd. II, S. 19 dieser Ausgabe.]

$s_1, s_2, \ldots s_n$ keine zwei gleiche sich finden, bewiesen worden. Der Nachweis, dass er auch noch gilt, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, war um so mehr erforderlich, als ich zeigen konnte, dass im Allgemeinen die in Rede stehende simultane Transformation zweier quadratischer Formen φ, ψ nur dann möglich ist, wenn die erwähnte Gleichung n von einander verschiedene Wurzeln hat.

Meine Begründung des Theorems stützt sich auf die beiden folgenden Hülfssätze:

1) Die Determinante der quadratischen Form

$$s\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

wo s eine unbestimmte Grösse bezeichnet, ist eine ganze Function n^{ten} Grades von s, die nur für reelle Werthe dieser Grösse verschwindet.

2) Drückt man $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die partiellen Ableitungen der Form

$$s\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

aus und setzt, die Determinante der Form mit $f(s)$ bezeichnend,

$$x_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} \left(s \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} \right),$$

so haben die ganzen Functionen $f(s)_{\alpha\beta}$ die Eigenschaft, dass sie in dem Falle, wo die Gleichung $f(s) = 0$ eine λ-fache Wurzel (s') besitzt, sämmtlich durch

$$(s - s')^{\lambda-1}$$

theilbar sind.

Für den ersten Satz giebt es bekanntlich eine nicht geringe Anzahl verschiedener Beweise; ich erinnere nur an die von Cauchy, Sylvester, Borchardt und Kronecker gegebenen.*) Mein a. a. O. entwickelter Beweis

*) Ich bedaure, nicht angegeben zu haben, dass Herr Christoffel im 63. Bande des Crelle'schen Journals zwei Theoreme aufgestellt hat, von denen die hier unter 1) und 2) angeführten Sätze specielle Fälle sind. Es hat dies wohl seinen Grund darin gehabt, dass der Beweis, den Herr Christoffel für sein zweites Theorem gegeben hat, weder rein algebraisch noch ganz einwandsfrei ist und mir deshalb unbefriedigend erschien. Ich hätte aber hervorheben müssen, dass sein Beweis des ersten Theorems nicht nur vollkommen richtig ist, sondern auch an Einfachheit nichts zu wünschen lässt.

hat eine andere Grundlage. Er ist vollkommen streng, leidet aber — wie die Mehrzahl der übrigen Beweise — an dem Übelstande, dass er sich unmittelbar nur auf den Fall, wo die n Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ von einander verschieden sind, erstreckt und durch einige an sich freilich sehr einfache Nebenbetrachtungen ergänzt werden muss. Der in der späteren Abhandlung (Monatsberichte 1868) ausgeführte Beweis des Satzes ist zwar von diesem Mangel frei, kann aber nur in einer vollständigen Theorie der simultanen Transformation zweier quadratischer Formen eine Stelle finden, während es doch, da die Gleichung $f(s) = 0$ auch bei anderen Untersuchungen vorkommt, wünschenswerth ist, dass die Realität aller ihrer Wurzeln unabhängig von jener Theorie nachgewiesen werde. Es möge mir deshalb gestattet sein, noch einmal auf den Gegenstand zurückzukommen, und einen neuen directen und zugleich sehr einfachen Beweis des in Rede stehenden Satzes mitzutheilen.

Es werde

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_\alpha} = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)_\alpha,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_\alpha} = \psi(x_1, x_2, \dots x_n)_\alpha$$

gesetzt, so ist $f(s)$ die Determinante der n linearen Functionen

$$s\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)_1 - \psi(x_1, x_2, \dots x_n)_1, \quad \dots \quad s\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)_n - \psi(x_1, x_2, \dots x_n)_n.$$

Angenommen nun, es werde $f(s) = 0$ für $s = k + li$, wo k, l reelle Grössen bezeichnen sollen, so lassen sich die n Gleichungen

$$(k+li)\,\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)_\alpha - \psi(x_1, x_2, \dots x_n)_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

durch Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, befriedigen. Es sei

$$\xi_1 + \eta_1 i, \ \xi_2 + \eta_2 i, \ \dots \ \xi_n + \eta_n i,$$

wo die ξ, η sämmtlich reelle Grössen bedeuten, ein System solcher Werthe, so hat man (für $\alpha = 1, \dots n$)

$$k\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)_\alpha - \psi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)_\alpha - l\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)_\alpha = 0,$$
$$k\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)_\alpha - \psi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)_\alpha + l\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)_\alpha = 0.$$

Daraus folgt, da

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\xi_\alpha\varphi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n})_\alpha-\eta_{i\alpha}\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)_\alpha)=0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\xi_\alpha\psi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n})_\alpha-\eta_{i\alpha}\psi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)_\alpha)=0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)_\alpha=\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\eta_{i\alpha}\varphi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n})_\alpha=\varphi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n})$$

ist, die Gleichung

$$l(\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)+\varphi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n}))=0.$$

Bei der angenommenen Beschaffenheit der Function $\varphi(x_1,x_2,\dots x_n)$ haben aber die Grössen

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n),\quad\varphi(\eta_{i_1},\eta_{i_2},\dots\eta_{i_n})$$

niemals entgegengesetzte Zeichen, und wenigstens eine von ihnen muss, da $\xi_1,\dots\xi_n,\ \eta_1,\dots\eta_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind, einen von Null verschiedenen Werth haben. Folglich ist nothwendig

$$l=0,$$

d. h. die Function $f(s)$ verschwindet nur für reelle Werthe von s; w. z. b. w.

Was den angeführten zweiten Hülfssatz angeht, so finde ich an dem a. a. O. gegebenen Beweise desselben nichts Wesentliches zu ändern.

Ich will aber bei dieser Gelegenheit noch einen anderen Gegenstand berühren.

In der citirten Abhandlung v. J. 1858 habe ich gezeigt, dass die in Rede stehenden Hülfssätze für die Integration eines bestimmten Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten von wesentlicher Bedeutung sind. Dieses System ist aber in dem nachstehenden allgemeineren, das in ganz ähnlicher Weise integrirt werden kann, enthalten:

$$(1.)\qquad\begin{cases}\dfrac{dx_\alpha}{dt}=\dfrac{\partial G(x_1,\dots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}}\\[2ex]\dfrac{dx_{n+\alpha}}{dt}=-\dfrac{\partial G(x_1,\dots x_{2n})}{\partial x_\alpha}.\end{cases}\qquad(\alpha=1,\dots n)$$

Hier bedeuten $x_1,\dots x_{2n}$ zu bestimmende Functionen der unabhängigen Ver-

änderlichen t, und $G(x_1, \dots x_{2n})$ eine ganze homogene Function zweiten Grades von $x_1, x_2, \dots x_{2n}$ mit reellen Coefficienten und von der Beschaffenheit, dass sie bei reellen Werthen der Veränderlichen $x_1, \dots x_{2n}$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, beständig positiv ist.

Die Darstellung der Integrale dieser $2n$ Differentialgleichungen kann nach der a. a. O. S. 219*) angegebenen Methode folgendermassen bewerkstelligt werden.

Man setze, unter s eine unbestimmte Grösse verstehend,

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} sx_{n+\alpha} + \dfrac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_\alpha} = y_\alpha \\ -sx_\alpha + \dfrac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} = y_{n+\alpha} \end{array} \right. \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

und drücke $x_1, \dots x_{2n}$ durch $y_1, \dots y_{2n}$ aus, so erhält man, die Determinante des vorstehenden Systems von Gleichungen mit $f(s)$ bezeichnend,

$$(3.) \qquad x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} y_\lambda, \qquad (\mu = 1, \dots 2n)$$

wo $f(s)_{\lambda\mu}$ eine ganze Function von s, deren Grad nicht grösser als $2n-1$ ist, bezeichnet, während der Grad von $f(s)$ gleich $2n$ ist.

Sind nun $\overset{0}{x}_1, \dots \overset{0}{x}_{2n}$ die Werthe von $x_1, \dots x_{2n}$ für irgend einen bestimmten Werth (t_0) von t, so setze man

$$(4.) \qquad \varphi(t)_{\lambda\mu} = \left[\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} e^{s(t-t_0)} \right]_{\frac{1}{s}},$$

wo der Ausdruck auf der Rechten die gewöhnliche Bedeutung hat.**) Dann ist (für $\mu = 1, \dots 2n$)

$$(5.) \qquad x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} (\overset{0}{x}_{n+\alpha} \varphi(t)_{\alpha,\mu} - \overset{0}{x}_\alpha \varphi(t)_{n+\alpha,\mu}).$$

---

*) [Bd. I, S. 245 dieser Ausgabe.]

**) Unter der Annahme, dass s dem absoluten Betrage nach grösser sei als jede Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$, entwickele man $\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$ in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{s}$ fortschreitende Reihe, und multiplicire diese mit der Entwickelung von $e^{s(t-t_0)}$, so lässt sich das Product in der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \mathfrak{P}(t-t_0)_\nu \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^\nu$$

darstellen, wo $\mathfrak{P}(t-t_0)_\nu$ eine beständig convergirende gewöhnliche Potenzreihe von $(t-t_0)$ bezeichnet, und es ist dann

$$\varphi(t)_{\lambda\mu} = \mathfrak{P}(t-t_0)_1.$$

Nun sei $ki+l$, wo k, l reelle Grössen bezeichnen sollen, irgend eine Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$, so lassen sich die $2n$ Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases} (ki+l)x_{n+\alpha} + \dfrac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_\alpha} = 0 \\ -(ki+l)x_\alpha + \dfrac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} = 0 \end{cases}$$

durch Werthe von $x_1, \dots x_{2n}$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, befriedigen. Ein System solcher Werthe sei

$$\xi_1 + \eta_{1i}, \dots \xi_{2n} + \eta_{i2n},$$

wo die ξ, η wieder reelle Grössen bedeuten. Dann hat man, wenn

$$\frac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_\mu} = G(x_1, \dots x_{2n})_\mu$$

gesetzt wird,

$$(7.)\qquad \begin{cases} G(\xi_1, \dots \xi_{2n})_\alpha + l\xi_{n+\alpha} - k\eta_{n+\alpha} = 0 \\ G(\xi_1, \dots \xi_{2n})_{n+\alpha} - l\xi_\alpha + k\eta_\alpha = 0 \\ G(\eta_1, \dots \eta_{2n})_\alpha + l\eta_{n+\alpha} + k\xi_{n+\alpha} = 0 \\ G(\eta_1, \dots \eta_{2n})_{n+\alpha} - l\eta_\alpha - k\xi_\alpha = 0. \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden:

$$(8.)\qquad \begin{cases} 2G(\xi_1, \dots \xi_{2n}) = k\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}) \\ 2G(\eta_1, \dots \eta_{2n}) = k\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}), \end{cases}$$

$$(9.)\qquad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{n} (\eta_\alpha G(\xi_1, \dots \xi_{2n})_\alpha + \eta_{n+\alpha} G(\xi_1, \dots \xi_{2n})_{n+\alpha}) = l\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}) \\ \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha G(\eta_1, \dots \eta_{2n})_\alpha + \xi_{n+\alpha} G(\eta_1, \dots \eta_{2n})_{n+\alpha}) = -l\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}), \end{cases}$$

$$(10.)\qquad l\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}) = 0.$$

Aus den Gleichungen (8.) ergiebt sich, dass bei der angenommenen Beschaffenheit der Function $G(x_1, \dots x_{2n})$ weder k noch

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha})$$

gleich Null sein kann. Folglich ist nothwendig

$$l = 0;$$

d. h. die Gleichung $f(s) = 0$ hat nur Wurzeln von der Form ki, wo k eine reelle, von Null verschiedene Grösse ist.

Es lässt sich ferner zeigen, dass in dem Falle, wo die Gleichung $f(s) = 0$ eine $\varkappa$-fache Wurzel (s') hat, sämmtliche Functionen $f(s)_{\lambda\mu}$ durch $(s-s')^{\varkappa-1}$ theilbar sind. Hierbei will ich ein Verfahren anwenden, welches von dem beim Beweise des obigen Satzes 2) gebrauchten in der Form verschieden ist, im Wesentlichen aber doch dieselbe Grundlage hat.

Man setze, unter $c_1, \dots c_{2n}$ bestimmte reelle Grössen verstehend,

$$(11.) \qquad \begin{cases} sx_{n+\alpha} + G(x_1, \dots x_{2n})_\alpha = c_\alpha \\ -sx_\alpha + G(x_1, \dots x_{2n})_{n+\alpha} = c_{n+\alpha}, \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

so hat man nach dem Obigen

$$(12.) \qquad x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} c_\lambda.$$

Es sei $s_1 i$ irgend eine Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ und m die kleinste positive ganze Zahl, bei der sämmtliche Functionen

$$(s-s_1 i)^m \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$$

für $s = s_1 i$ einen endlichen Werth erhalten. Dann lässt sich, wenn s hinlänglich nahe bei $s_1 i$ angenommen wird, x_μ in eine Reihe von der Form

$$(g_\mu + h_\mu i)(s-s_1 i)^{-m} + (g'_\mu + h'_\mu i)(s-s_1 i)^{-m+1} + \cdots$$

entwickeln, wo $g_\mu, h_\mu, g'_\mu, h'_\mu, \dots$ reelle, von s nicht abhängende Grössen bedeuten. Dabei kann man den c_λ stets solche Werthe geben, dass die g_μ, h_μ nicht sämmtlich gleich Null sind. Diesen Ausdruck von x_μ setze man in die Gleichungen (11.) ein, so ergiebt sich (für $\alpha = 1, \dots n$)

$$(13.) \qquad \begin{cases} G(g_1, \dots g_{2n})_\alpha - s_1 h_{n+\alpha} = 0, & G(h_1, \dots h_{2n})_\alpha + s_1 g_{n+\alpha} = 0, \\ G(g_1, \dots g_{2n})_{n+\alpha} + s_1 h_\alpha = 0, & G(h_1, \dots h_{2n})_{n+\alpha} - s_1 g_\alpha = 0, \end{cases}$$

ferner

$$(14.)\quad \begin{cases} G(g'_1, \dots g'_{2n})_\alpha - s_1 h'_{n+\alpha} + g_{n+\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m > 1 \\ c_\alpha, & \text{wenn } m = 1 \end{cases} \\ G(g'_1, \dots g'_{2n})_{n+\alpha} + s_1 h'_\alpha - g_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m > 1 \\ c_{n+\alpha}, & \text{wenn } m = 1, \end{cases} \end{cases}$$

$$(15.)\quad \begin{cases} G(h'_1, \dots h'_{2n})_\alpha + s_1 g'_{n+\alpha} + h_{n+\alpha} = 0 \\ G(h'_1, \dots h'_{2n})_{n+\alpha} - s_1 g'_\alpha - h_\alpha = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (13.) ergiebt sich

$$(16.)\quad \begin{cases} 2G(g_1, \dots g_{2n}) = s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) \\ 2G(h_1, \dots h_{2n}) = s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}), \end{cases}$$

und es ist deshalb

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha})$$

nicht gleich Null. Aus denselben Gleichungen erhält man weiter:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{2n} h'_\lambda G(g_1, \dots g_{2n})_\lambda + s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) = 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{2n} g'_\lambda G(h_1, \dots h_{2n})_\lambda - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}) = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (14.), (15.) aber würde, wenn $m > 1$ wäre, folgen:

$$(18.)\quad \begin{cases} 0 = \sum_{\lambda=1}^{2n} h_\lambda G(g'_1, \dots g'_{2n})_\lambda - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) \\ 0 = \sum_{\lambda=1}^{2n} g_\lambda G(h'_1, \dots h'_{2n})_\lambda + s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}). \end{cases}$$

Da nun

$$(19.)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{2n} h'_\lambda G(g_1, \dots g_{2n})_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{2n} g_\lambda G(h'_1, \dots h'_{2n})_\lambda \\ \sum_{\lambda=1}^{2n} g'_\lambda G(h_1, \dots h_{2n})_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{2n} h_\lambda G(g'_1, \dots g'_{2n})_\lambda \end{cases}$$

ist, so würde sich aus den vorstehenden Gleichungen ergeben:

$$(20.)\quad \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = 0,$$

was mit dem vorhin Bewiesenen im Widerspruch steht. Deshalb muss $m = 1$ sein; d. h. wenn $f(s)$ durch $(s-s_1 i)^\varkappa$ theilbar ist, so haben alle Functionen $f(s)_{\lambda\mu}$ den Theiler

$$(s-s_1 i)^{\varkappa-1}.$$

Nun seien $s_1, \ldots s_r$ die von einander verschiedenen positiven Wurzeln der Gleichung $f(si) = 0$, so dass die Functionen $\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$ nur für

$$s = \pm s_1 i, \ \ldots \pm s_r i$$

unendlich werden können. Dann hat man, wenn der Coefficient von $(s-s_\varrho i)^{-1}$ in der Entwickelung von

$$\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$$

nach Potenzen von $(s-s_\varrho i)$ mit

$$(\lambda,\mu)_\varrho + i(\lambda,\mu)'_\varrho$$

bezeichnet wird — wo $(\lambda,\mu)_\varrho$ und $(\lambda,\mu)'_\varrho$ reelle Grössen sein sollen —,

$$\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} = \sum_{\varrho=1}^{r} \left\{ \frac{(\lambda,\mu)_\varrho + i(\lambda,\mu)'_\varrho}{s-s_\varrho i} + \frac{(\lambda,\mu)_\varrho - i(\lambda,\mu)'_\varrho}{s+s_\varrho i} \right\}. \tag{21.}$$

Es ist aber

$$\begin{cases} \left[\dfrac{e^{s(t-t_0)}}{s-s_\varrho i}\right]_{\frac{1}{s}} = e^{s_\varrho (t-t_0) i} \\ \left[\dfrac{e^{s(t-t_0)}}{s+s_\varrho i}\right]_{\frac{1}{s}} = e^{-s_\varrho (t-t_0) i}; \end{cases} \tag{22.}$$

und es ergiebt sich demgemäss

$$\varphi(t)_{\lambda\mu} = 2\sum_{\varrho=1}^{r} \left\{ (\lambda,\mu)_\varrho \cos s_\varrho (t-t_0) - (\lambda,\mu)'_\varrho \sin s_\varrho (t-t_0) \right\}. \tag{23.}$$

Damit sind die Ausdrücke von $x_1, \ldots x_{2n}$, welche auf die allgemeinste Weise die gegebenen Differentialgleichungen befriedigen, vollständig bestimmt.

Unter den Grössen $(\lambda,\mu)_\varrho$, $(\lambda,\mu)'_\varrho$ bestehen die Relationen

$$\begin{cases} (\lambda,\mu)_\varrho = -(\mu,\lambda)_\varrho \\ (\lambda,\mu)'_\varrho = \ \ (\mu,\lambda)'_\varrho, \end{cases} \tag{24.}$$

und somit insbesondere

$$(25.) \qquad (\lambda, \lambda)_\varrho = 0.$$

Diese Relationen ergeben sich aus den für die Functionen $f(s), f(s)_{\lambda\mu}$ in Folge der Definition derselben geltenden Gleichungen

$$(26.) \qquad \begin{cases} f(s) = f(-s) \\ f(s)_{\lambda\mu} = f(-s)_{u\lambda}. \end{cases}$$

ÜBER DIE BEDINGUNGEN DER ZERLEGBARKEIT EINER GANZEN RATIONALEN FUNCTION VON MEHR ALS ZWEI VERÄNDERLICHEN.

Es sei

$$G(x, x_1, \dots x_n)$$

eine unzerlegbare ganze rationale Function der (von einander unabhängigen) Veränderlichen $x, x_1, \dots x_n$. Setzt man für diese Veränderlichen, unter der Voraussetzung, dass die Anzahl derselben grösser als zwei sei, ganze rationale Functionen zweier Veränderlichen u, v, so kann die Function $g(u, v)$, in welche $G(x, x_1, \dots x_n)$ dadurch übergeht, zerlegbar sein; es soll aber gezeigt werden, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, und nur eintrifft, wenn unter den Coefficienten der für $x, x_1, \dots x_n$ substituirten Functionen von u, v bestimmte Bedingungsgleichungen stattfinden.

Ich will zunächst annehmen, dass $G(x, x_1, \dots x_n)$ die Form

$$x^m + F_1(x_1, \dots x_n)x^{m-1} + \dots + F_m(x_1, \dots x_n)$$

habe, wo $F_1, \dots F_m$ ganze Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten.

Dann gehören zu jedem System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$ stets m endliche Werthe von x, welche die Gleichung

$$G(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

befriedigen, und es finden sich unter diesen keine zwei gleiche, wenn man $x_1, \dots x_n$ so annimmt, dass

$$G(x, x_1, \dots x_n), \quad \frac{\partial G(x, x_1, \dots x_n)}{\partial x},$$

als Functionen von x betrachtet, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Es sei $a_1, \dots a_n$ irgend ein bestimmtes, dieser Bedingung genügendes Werthsystem der Grössen $x_1, \dots x_n$, und

$$a^{(1)}, a^{(2)}, \dots a^{(m)}$$

die zugehörigen Werthe von x. Dann lässt sich, wenn ν eine der Zahlen $1, \dots m$ ist, eine Potenzreihe von

$$x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$$

bestimmen, welche für x gesetzt die Gleichung

$$G(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

befriedigt, und den Werth $a^{(\nu)}$ annimmt, wenn

$$(x_1, \dots x_n) = (a_1, \dots a_n)$$

gesetzt wird. Diese Reihe, welche einen bestimmten Convergenzbezirk besitzt, werde mit $x^{(\nu)}$ bezeichnet.

Nun sei r eine ganze positive Zahl, die kleiner als m ist, und

$$\nu_1, \dots \nu_r$$

irgend r der Zahlen $1, \dots m$. Bezeichnet man dann mit

$$G(x, x_1, \dots x_n)_{\nu_1, \dots \nu_r} \text{ den Ausdruck } (x - x^{(\nu_1)}) \dots (x - x^{(\nu_r)}),$$

so lässt sich derselbe für diejenigen Werthsysteme der Grössen $x_1, \dots x_n$, welche dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk sämmtlicher Reihen $x^{(\nu)}$ angehören, in der Form

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)_\lambda$$

darstellen, wo $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)_\lambda$ eine ganze homogene Function λ^{ten} Grades von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind, bedeutet. Es ist nun nicht möglich, dass die Functionen $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)_\lambda$ von einer bestimmten an sämmtlich identisch verschwinden. Denn man hat, wenn mit

$$\mu_1, \dots \mu_{m-r}$$

diejenigen der Zahlen $1, \dots m$, die nicht in der Reihe $\nu_1, \dots \nu_r$ enthalten sind,

bezeichnet werden,

$$G(x, x_1, \dots x_n) = G(x, x_1, \dots x_n)_{\nu_1, \dots \nu_r} G(x, x_1, \dots x_n)_{\mu_1, \dots \mu_{m-r}}.$$

Wäre nun $G(x, x_1, \dots x_n)_{\nu_1, \dots \nu_r}$ eine ganze Function von x und $x_1, \dots x_n$, so würde sich, wenn man $G(x, x_1, \dots x_n)$, als Function von x betrachtet, durch $G(x, x_1, \dots x_n)_{\nu_1, \dots \nu_r}$ dividirt, $G(x, x_1, \dots x_n)_{\mu_1, \dots \mu_{m-r}}$ als ganze Function von x mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ wären, ergeben; d. h. es würde $G(x, x_1, \dots x_n)$ zerlegbar sein, was wider die Annahme ist.

Jetzt setze man, unter $b_1, \dots b_n$ Constanten und unter u eine Veränderliche verstehend,

$$x_1 = a_1 + b_1 u, \quad \dots \quad x_n = a_n + b_n u;$$

so kann man $b_1, \dots b_n$ so annehmen, dass

$$G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\nu_1, \dots \nu_r} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (b_1, \dots b_n)_\lambda u^\lambda$$

nicht eine ganze rationale Function von u wird. Denn es sei $G(x, x_1, \dots x_n)$, als Function von $x_1, \dots x_n$ betrachtet, von der s^{ten} Dimension, so nehme man eine Zahl l so an, dass $l \geqq s$, und $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)_l$ nicht identisch gleich Null ist. Wählt man dann $b_1, \dots b_n$ so, dass

$$(b_1, \dots b_n)_l$$

nicht gleich Null ist, so kann sich $G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\nu_1, \dots \nu_r}$ nicht auf eine ganze rationale Function von u reduciren. Denn ist dies bei bestimmten Werthen von $b_1, \dots b_n$ der Fall, so hat man

$$G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u) = G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\nu_1, \dots \nu_r} G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\mu_1, \dots \mu_{m-r}},$$

und es ist auch $G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\mu_1, \dots \mu_{m-r}}$ eine ganze rationale Function von x und u; es kann aber der Grad von $G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)$ in Beziehung auf u nicht grösser als s sein, während bei der in Betreff der Grössen $b_1, \dots b_n$ gemachten Annahme, falls $G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\nu_1, \dots \nu_r}$ eine ganze rationale Function von u wäre, dieser Grad grösser als s sein würde.

Bildet man nun alle Functionen

$$G(x, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)_{\nu_1, \dots \nu_r},$$

indem man für $\nu_1, \dots \nu_r$ alle möglichen Combinationen von 1, 2, ... $(m-1)$ Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... m annimmt, so ist nach dem Vorstehenden klar, dass im Allgemeinen, d. h. wenn $b_1, \dots b_n$ nicht besondere Bedingungen erfüllen, keine dieser Functionen eine ganze rationale Function von u ist. Angenommen nun, es sei $G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu)$ bei bestimmten Werthen von $b_1, \dots b_n$ zerlegbar, und man habe

$$G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu) = G_1(x,u)G_2(x,u).$$

Da der Coefficient von x^m in $G(x, a_1+b_1u, \dots)$ von u unabhängig ist, so kann diese Function nicht dargestellt werden als Product zweier ganzen Functionen, von denen die eine von x unabhängig ist. $G_1(x,u)$ und $G_2(x,u)$ enthalten also beide die Grösse x. Ist die erstere vom Grade r, so ist das Product des Coefficienten von x^r in G_1 und des Coefficienten von x^{m-r} in G_2 gleich 1; beide Coefficienten sind also von u unabhängig, und man darf annehmen, dass jeder den Werth 1 habe. Die Wurzeln der Gleichung $G_1(x,0)=0$ sind nun r der Grössen $a^{(\nu)}$; bezeichnet man dieselben mit $a^{(\nu_1)}, \dots a^{(\nu_r)}$, so ist nothwendig — für hinlänglich kleine Werthe von u —

$$G_1(x,u) = G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu)_{\nu_1, \dots \nu_r}.$$

Es ist also $G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu)$ nur dann zerlegbar, wenn $b_1, \dots b_n$ solche Werthe haben, dass in der Entwickelung einer der Functionen

$$G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu)_{\nu_1, \dots \nu_r}$$

nach Potenzen von u alle Glieder von einem bestimmten an identisch verschwinden. Nimmt man also $b_1, \dots b_n$ so an, dass dies für keine dieser Functionen eintrifft, so ist die Function

$$G(x, a_1+b_1u, \dots a_n+b_nu)$$

nothwendig unzerlegbar.

Jetzt sei $G(x, x_1, \dots x_n)$ eine beliebige unzerlegbare ganze Function m^{ter} Dimension von $x, x_1, \dots x_n$. Man setze, unter $c, c_1, \dots c_n$ Constanten verstehend,

$$x = cz, \quad x_1 = c_1z+z_1, \quad \dots \quad x_n = c_nz+z_n,$$

und nehme $c, c_1, \dots c_n$ so an, dass der Coefficient von z^m in

$$G(cz, c_1z, \dots c_nz)$$

nicht gleich Null ist. Bezeichnet man denselben mit C, so wird

$$G(x, x_1, \dots x_n) = C \cdot \{z^m + Z_1 z^{m-1} + \dots + Z_m\} = CH(z, z_1, \dots z_n),$$

wo $Z_1, \dots Z_m$ ganze Functionen von $z_1, \dots z_n$ sind.

Setzt man nun

$$z_1 = a_1 + b_1 u, \quad \dots \quad z_n = a_n + b_n u$$

und nimmt die Constanten $a_1, \dots a_n$ so an, dass die Gleichung

$$H(z, a_1, \dots a_n) = 0$$

m von einander verschiedene Wurzeln hat, so ist die Function

$$H(z, a_1 + b_1 u, \dots a_n + b_n u)$$

nur für besondere Werthsysteme $(b_1, \dots b_n)$ zerlegbar.

Setzt man v für z, so ergiebt sich, dass die unzerlegbare Function

$$G(x, x_1, \dots x_n),$$

wenn man

$$\begin{aligned} x &= cv, \\ x_1 &= a_1 + b_1 u + c_1 v, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= a_n + b_n u + c_n v \end{aligned}$$

setzt, sich in eine Function von u, v verwandelt, die im Allgemeinen auch nicht zerlegbar ist.

Setzt man ferner allgemeiner

$$x = \mathfrak{F}(u, v), \quad x_1 = \mathfrak{F}_1(u, v), \quad \dots \quad x_n = \mathfrak{F}_n(u, v),$$

unter $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \dots \mathfrak{F}_n$ ganze Functionen von u, v verstehend, so verwandelt sich $G(x, x_1, \dots x_n)$ in eine ganze Function von u, v, welche im Allgemeinen ebenfalls unzerlegbar ist. Dies geht unmittelbar daraus hervor, dass man nach dem Vorstehenden sämmtliche Coefficienten der Glieder von höherer als der ersten Dimension in $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \dots \mathfrak{F}_n$ gleich Null setzen, und die übrigen dann doch noch so annehmen kann, dass die in Rede stehende Function unzerlegbar bleibt.

ZUR THEORIE DER JACOBI'SCHEN FUNCTIONEN VON MEHREREN VERÄNDERLICHEN.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 4. Mai 1882.)

Für die Function $\sigma(u|\omega,\omega')$, die hier bloss mit $\sigma(u)$ bezeichnet werden soll, gilt das in der nachstehenden Gleichung ausgesprochene fundamentale Theorem:

Es seien u, u_1, u_2, u_3 vier willkürlich anzunehmende Grössen, so ist

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3) \\ +\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1) \\ +\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2) \;=\; 0.\text{*)} \end{array}\right.$$

Diese Gleichung ist wesentlich anderer Art als die von Jacobi entdeckten, auf S. 507 des ersten Bandes der »Gesammelten Werke« vollständig aufgestellten Relationen unter Producten von je vier ϑ-Functionen; sie enthält nur eine Function, während in jeder der Jacobi'schen Gleichungen, die sich übrigens aus ihr ableiten lassen, zwei oder mehrere ϑ-Functionen vorkommen.

Bekanntlich existiren auch unter ϑ-Functionen mehrerer Argumente Relationen, die den Jacobi'schen, für ϑ-Functionen eines Arguments geltenden analog sind. Dagegen ist, so viel ich weiss, die folgende Verallgemeinerung des in der Gleichung (1.) enthaltenen Satzes noch nirgends gegeben worden.

*) Vgl. »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von H. A. Schwarz«, S. 47. Ich habe das Theorem zuerst im Jahre 1862 in meinen Universitätsvorlesungen mitgetheilt und auf die a. a. O. angedeutete Weise begründet.

Die Function $\sigma(u)$ lässt sich durch die Jacobi'sche Function $\vartheta_1(x)$ in der Form

$$\sigma(u) = Ce^{auu}\vartheta_1(cu) \tag{2.}$$

ausdrücken, wo C, a, c von u unabhängige Grössen bedeuten, welche ebenso wie die in $\vartheta_1(x)$ vorkommende Grösse q bestimmte Functionen von ω, ω' sind. Es ist indessen leicht zu sehen, dass die Gleichung (1.) bestehen bleibt, wenn man bei willkürlicher Annahme der Constanten q, a, c, C die Function $\sigma(u)$ durch die Gleichung (2.) definirt.

In ähnlicher Weise definire ich nun eine Function $\sigma(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)})$ von ϱ Veränderlichen, indem ich irgend eine ungerade ϑ-Function von ϱ Argumenten

$$\vartheta_1(v, v', \ldots v^{(\varrho-1)})$$

annehme, in derselben für $v, v', \ldots v^{(\varrho-1)}$ von einander unabhängige homogene lineare Functionen der Veränderlichen $u, u', \ldots u^{(\varrho-1)}$ substituire und dann

$$\sigma(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)}) = Ce^{\psi(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)})}.\vartheta_1(v, v', \ldots v^{(\varrho-1)})$$

setze, wo ψ eine ganze und homogene Function zweiten Grades von $u, u', \ldots u^{(\varrho-1)}$, und C eine willkürliche Constante bezeichnet.

Dies vorausgesetzt sei

$$r = 2^\varrho;$$

man nehme $r+2$ Argumentensysteme

$$\begin{array}{llll} u, & u', & \ldots & u^{(\varrho-1)} \\ u_1, & u_1', & \ldots & u_1^{(\varrho-1)} \\ u_2, & u_2', & \ldots & u_2^{(\varrho-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{r+1}, & u_{r+1}', & \ldots & u_{r+1}^{(\varrho-1)} \end{array}$$

willkürlich an und bilde das Product

$$\sigma(u+u_1, \ldots)\,\sigma(u-u_1, \ldots)\,\sigma(u_2+u_3, \ldots)\,\sigma(u_2-u_3, \ldots) \ldots \sigma(u_r+u_{r+1}, \ldots)\,\sigma(u_r-u_{r+1}, \ldots)$$

(wo der Kürze wegen von jeder σ-Function nur das erste Argument angegeben worden ist). In demselben permutire man sodann die Indices $1, 2, 3, \ldots r, r+1$ in folgender Weise.

Man lasse zunächst die $(r+1)$ Indices einen Cyklus durchlaufen; in jeder der so entstehenden Permutationen nehme man dieselbe Operation vor mit ihren $(r-1)$ letzten Indices, in jeder der so sich ergebenden Permutationen wiederhole man dieselbe Operation mit ihren $(r-3)$ letzten Indices u. s. w.*)

Die Summe der auf diese Weise aus dem angegebenen Producte hervorgehenden Producte ist dann identisch gleich Null.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Setzt man in dem ursprünglich angenommenen Producte für jeden Factor die unendliche Reihe ein, durch welche er dargestellt wird, so lässt sich der Ausdruck in ein Aggregat von Producten, in denen jeder Factor bloss von einem der angegebenen Argumenten-Systeme abhängt, verwandeln. Wenn man dann in jedem einzelnen Gliede dieses Aggregates die Indices $1, 2, \ldots r+1$ in der beschriebenen Weise permutirt, so zeigt sich, dass die Summe der so sich ergebenden Glieder identisch gleich Null ist.

Die Anzahl der Glieder der Gleichung wächst sehr stark mit ϱ; sie ist gleich

$$1.3.5 \ldots (r+1).$$

Setzt man $u_0, u_0', \ldots$ für $u, u', \ldots$ und

$$\sigma(u_\alpha + u_\beta, u_\alpha' + u_\beta', \ldots)\,\sigma(u_\alpha - u_\beta, u_\alpha' - u_\beta', \ldots) = S_{\alpha,\beta},$$

so dass

$$S_{\alpha,\alpha} = 0, \quad S_{\alpha,\beta} = -S_{\beta,\alpha}$$

ist, und

$$S = \sum \sigma(u_0+u_1, \ldots)\,\sigma(u_0-u_1, \ldots)\,\sigma(u_2+u_3, \ldots)\,\sigma(u_2-u_3, \ldots) \ldots \sigma(u_r+u_{r+1}, \ldots)\,\sigma(u_r-u_{r+1}, \ldots),$$

so besteht die identische Gleichung:

$$S^2 = \begin{vmatrix} 0 & S_{0,1} & S_{0,2} & \ldots & S_{0,r+1} \\ S_{1,0} & 0 & S_{1,2} & \ldots & S_{1,r+1} \\ S_{2,0} & S_{2,1} & 0 & \ldots & S_{2,r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r+1,0} & S_{r+1,1} & S_{r+1,2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

*) Für $\varrho = 2$ z. B. ist $r = 4$, und die angegebenen Permutationen sind die folgenden:

12345, 23451, 34512, 45123, 51234,
12453, 23514, 34125, 45231, 51342,
12534, 23145, 34251, 45312, 51423.

Man kann daher den aufgestellten Satz auch beweisen, indem man von der Determinante auf der rechten Seite dieser Gleichung zeigt, dass sie für beliebige Werthe der Grössen

$$u_0,\ u_0',\ \ldots,\quad u_1,\ u_1',\ \ldots,\quad u_{r+1},\ u_{r+1}',\ \ldots$$

verschwindet, was mit Hülfe bekannter Sätze geschehen kann.*)

Setzt man

$$u+\frac{w}{2},\quad u'+\frac{w'}{2},\ \ldots \text{ für } u,\ u',\ \ldots,$$

$$u_1+\frac{w}{2},\quad u_1'+\frac{w'}{2},\ \ldots \text{ für } u_1,\ u_1',\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{r+1}+\frac{w}{2},\ u_{r+1}'+\frac{w'}{2},\ \ldots \text{ für } u_{r+1},\ u_{r+1}',\ \ldots,$$

so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad 0=\Sigma\begin{Vmatrix}\sigma(u+u_1+w,\ldots)\,\sigma(u_2+u_3+w,\ldots)\ldots\sigma(u_r+u_{r+1}+w,\ldots)\\ \sigma(u-u_1,\ldots)\qquad\sigma(u_2-u_3,\ldots)\qquad\ldots\sigma(u_r-u_{r+1},\ldots)\end{Vmatrix},$$

wo die Bedeutung des Summenzeichens aus dem Vorstehenden erhellt.

Auf die zahlreichen Folgerungen, die sich aus dieser Gleichung in ähnlicher Weise wie in der Theorie der elliptischen Functionen aus der Gleichung (1.) ziehen lassen, gehe ich hier nicht ein. Dagegen will ich noch eine functionentheoretische Frage berühren, welche sich an die Gleichung $S=0$ knüpft.

Man kann, ohne von der Function $\sigma(u)$ irgend etwas zu wissen, direct nachweisen, dass es eine vier willkürliche Constanten enthaltende (transscendente) ganze Function der Veränderlichen u giebt, welche für $\sigma(u)$ in die Gleichung (1.) eingesetzt, dieselbe befriedigt. Man zeigt zu dem Ende zunächst, dass der Gleichung formell genügt werden kann, wenn man für $\sigma(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe annimmt; dieselbe enthält nur ungerade Potenzen von u, und die Coefficienten derselben lassen sich als ganze rationale Functionen der vier ersten, die unbestimmt bleiben, ausdrücken. Mit

*) Die Bildungsweise des Ausdrucks, dessen Quadrat einer sogenannten Pfaff'schen Determinante gleich ist und deswegen von Cayley »Pfaffian« genannt wird, hat zuerst Jacobi in der Abhandlung »Zur Pfaff'schen Integrationsmethode« im zweiten Bande des Crelle'schen Journals angegeben.

Hülfe der Gleichung (1.) selbst lässt sich dann ferner nachweisen, dass diese Potenzreihe bei beliebigen Werthen der Veränderlichen u und der genannten willkürlichen Constanten convergent ist, also eine Function von der angegebenen Beschaffenheit darstellt. Setzt man sodann

$$\varphi(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2},$$

so ergiebt sich, ebenfalls aus der Gleichung (1.),

$$\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)^2 = A\varphi^3(u) + B\varphi^2(u) + C\varphi(u) + D,$$

wo A, B, C, D Constanten sind; wodurch der Zusammenhang der auf die angegebene Weise definirten Function $\sigma(u)$ mit der Theorie der elliptischen Functionen festgestellt ist. Hiernach liegt es nun nahe, die Frage aufzuwerfen, ob sich nicht in ähnlicher Weise die Existenz einer (transcendenten) ganzen Function von ϱ Veränderlichen $u, u', \ldots u^{(\varrho-1)}$, welche, für $\sigma(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)})$ gesetzt, die Gleichung $S = 0$ befriedigt, direct beweisen lasse. Es wird auch in diesem Falle ausreichen, zunächst zu zeigen, dass es eine gewöhnliche Potenzreihe von $u, u', \ldots u^{(\varrho-1)}$ giebt, welche, für $\sigma(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)})$ gesetzt, der in Rede stehenden Gleichung formell genügt. Die Ausdrücke der Coefficienten dieser Reihe durch eine Anzahl von einander unabhängiger Grössen werden sich freilich complicirter gestalten, als für die Functionen $\sigma(u)$; sie sind nothwendig algebraische Functionen jener Grössen, wie schon daraus erhellt, dass es, wenn $\varrho > 1$, mehrere ungerade Functionen $\sigma(u, u', \ldots u^{(\varrho-1)})$ giebt, für welche die Gleichung $S = 0$ besteht, z. B. sechs, wenn $\varrho = 2$ ist. Bei der hohen Ausbildung, zu der die formale Algebra gelangt ist, sollte ich aber meinen, müsste eine Aufgabe, wie die angedeutete, nicht von vornherein als eine unlösbare betrachtet werden.

REIN GEOMETRISCHER BEWEIS DES HAUPTSATZES DER PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE.

(Die nachstehende, bis jetzt noch nicht gedruckte Abhandlung verdankt ihre Entstehung mündlichen Mittheilungen an ehemalige Zuhörer. Die vorliegende Fassung derselben rührt von den Herren E. Kötter und H. A. Schwarz her.)

Die projectivische Geometrie betrachtet drei Arten von Grundgebilden erster Stufe: das Ebenenbüschel — die Gesammtheit der durch eine Gerade, die Achse, hindurchgehenden Ebenen —, das Strahlbüschel — die Gesammtheit der Strahlen, die in einer Ebene liegen und von einem Punkte, dem Mittelpunkte, ausgehen —, endlich die Punktreihe — den Inbegriff aller einer Geraden angehörenden Punkte. Nach dem Gesetze der Dualität steht bei Untersuchungen im dreidimensionalen Raume das erste Gebilde dem dritten, das zweite sich selbst gegenüber. Ein Ebenenbüschel schneidet auf jeder Ebene, die seine Achse nicht enthält, ein Strahlbüschel, auf jeder Geraden, die seine Achse nicht trifft, eine Punktreihe aus. Einer Ebene des Ebenenbüschels ist hierbei in jedem dieser Gebilde ein bestimmtes Element, das in ihr liegende, eindeutig zugeordnet. Diese Beziehung wird die perspectivische genannt. Für das Strahlbüschel und die Punktreihen, welche von einem solchen auf Geraden seiner Ebene ausgeschnitten werden, findet dieselbe Benennung Anwendung.

Von einer Reihe von Grundgebilden erster Stufe sei nun das erste zum zweiten, das zweite zum dritten, das dritte zum vierten, u. s. w. perspectivisch. Irgend einem Elemente eines dieser Gebilde ist dann in jedem anderen Gebilde der Reihe ein und nur ein Element zugeordnet. Diese Beziehung wird die projectivische genannt. — Von zwei Grundgebilden erster Stufe lässt sich alsdann beweisen, dass es stets möglich ist, zwischen ihnen eine

projectivische Beziehung der Art herzustellen, dass drei beliebigen Elementen des einen Grundgebildes drei beliebige Elemente des anderen entsprechen, und dass eine solche Beziehung stets durch Vermittelung einer endlichen Anzahl von Hülfsgebilden herbeigeführt werden kann. Hierbei sind die beiden projectivisch auf einander bezogenen Grundgebilde entweder von derselben, oder von verschiedener Art, so dass sechs Fälle zu unterscheiden sind.

Ehe jedoch zu der Betrachtung dieser sechs Fälle geschritten wird, ist es zweckmässig, Folgendes hervorzuheben.

Sind zwei Punktreihen, welche nicht auf derselben Geraden liegen, zu demselben Strahlbüschel perspectivisch, so haben sie einen Punkt gemein, welcher sich selbst entspricht. Sollen daher zwei Punktreihen einer Ebene perspectivisch auf dasselbe Strahlbüschel bezogen werden, so muss ihr Schnittpunkt sich selbst entsprechen. Zwei beliebigen anderen Punkten der einen Punktreihe können dann zwei beliebige andere Punkte der anderen zugeordnet werden; hierdurch ist das erwähnte Strahlbüschel bestimmt.

Sind drei beliebigen Punkten einer Punktreihe drei beliebige Punkte einer zweiten zugeordnet, so können diese beiden Punktreihen auf eine dritte projectivisch so bezogen werden, dass die erste und die dritte Punktreihe zu einem Strahlbüschel, die zweite und die dritte Punktreihe zu einem zweiten Strahlbüschel perspectivisch sind.

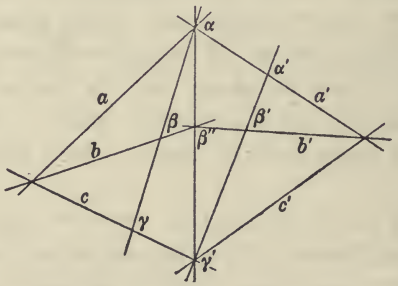


Fig. 1.

In Fig. 1 sind die Punktgruppen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta''\gamma'$ einerseits, die Punktgruppen $\alpha\beta''\gamma'$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ andererseits zu je einer Strahlengruppe perspectivisch.

Sind die beiden Geraden, auf welchen die beiden Punktgruppen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ liegen, windschief gegen einander, so sind die beiden Strahlbüschel, welchen die vorher erwähnten beiden Strahlengruppen angehören, zu einem Ebenenbüschel perspectivisch, dessen Achse die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel enthält.

Mittels der dualistischen Betrachtungsweise kann für zwei Ebenenbüschel die entsprechende Construction ausgeführt werden.

Für die möglichen sechs Fälle ergiebt sich hiernach das Folgende:

a. Zwei Punktreihen, welche nicht auf derselben Geraden liegen, können auf zwei Strahlbüschel mit verschiedenen Mittelpunkten, und diese auf eine dritte Punktreihe perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Punkten der ersten Punktreihe drei beliebige Punkte der zweiten Punktreihe entsprechen. Sind die Geraden, auf welchen die ersten beiden Punktreihen liegen, windschief gegen einander, so sind die beiden Strahlbüschel, folglich auch die beiden Punktreihen, zu einem Ebenenbüschel perspectivisch.

b. Zwei Ebenenbüschel, deren Achsen nicht zusammenfallen, können auf zwei Strahlbüschel, und diese auf ein drittes Ebenenbüschel perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Ebenen des ersten Ebenenbüschels drei beliebige Ebenen des zweiten entsprechen. Sind die Achsen der beiden Ebenenbüschel windschief gegen einander, so sind die beiden Strahlbüschel, folglich auch die beiden Ebenenbüschel, zu einer Punktreihe perspectivisch.

c. Zwei Strahlbüschel mit verschiedenen Mittelpunkten können auf zwei Ebenenbüschel, deren Achsen windschief gegen einander sind, und diese auf eine Punktreihe perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Strahlen des einen Strahlbüschels drei beliebige Strahlen des anderen entsprechen. Zwei in verschiedenen Ebenen liegende Strahlbüschel können auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Punktreihen, und diese auf ein Ebenenbüschel perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Strahlen des einen Strahlbüschels drei beliebige Strahlen des anderen entsprechen.

Um zwei auf derselben Geraden liegende Punktreihen, zwei Ebenenbüschel mit derselben Achse, oder zwei in derselben Ebene liegende Strahlbüschel, welche denselben Mittelpunkt haben, in allgemeinster Weise projectivisch auf einander zu beziehen, kann man zunächst je eins dieser zwei Grund-

gebilde auf ein anderes Grundgebilde perspectivisch beziehen. Hierdurch wird jeder von diesen drei Fällen auf einen der drei folgenden zurückgeführt.

d. Es ist stets möglich, ein gegebenes Ebenenbüschel und eine gegebene Punktreihe auf einander projectivisch so zu beziehen, dass drei beliebigen Ebenen des Ebenenbüschels drei beliebige Punkte der Punktreihe entsprechen. Wird nämlich das Ebenenbüschel durch eine Gerade geschnitten, welche weder mit der Achse des Ebenenbüschels, noch mit der gegebenen Punktreihe einen Punkt gemein hat, so ist das Ebenenbüschel perspectivisch zu der auf dieser Geraden liegenden Punktreihe, und die letztere kann (nach a.) auf die gegebene Punktreihe durch ein zu beiden Punktreihen perspectivisches Ebenenbüschel projectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Ebenen des gegebenen Ebenenbüschels drei beliebige Punkte der gegebenen Punktreihe entsprechen.

e. Es ist stets möglich, ein gegebenes Strahlbüschel und eine gegebene Punktreihe auf einander projectivisch so zu beziehen, dass drei beliebigen Strahlen des Strahlbüschels drei beliebige Punkte der Punktreihe entsprechen. Wird nämlich das Strahlbüschel und die Punktreihe auf je ein Ebenenbüschel perspectivisch bezogen, wobei die beiden Ebenenbüschel so gewählt werden, dass ihre Achsen windschief gegen einander sind, so können die beiden Ebenenbüschel (nach b.) auf dieselbe Punktreihe perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Strahlen des gegebenen Strahlbüschels drei beliebige Punkte der gegebenen Punktreihe entsprechen.

f. Es ist stets möglich, ein gegebenes Strahlbüschel und ein gegebenes Ebenenbüschel auf einander projectivisch so zu beziehen, dass drei beliebigen Strahlen des Strahlbüschels drei beliebige Ebenen des Ebenenbüschels entsprechen. Wird nämlich das Strahlbüschel und das Ebenenbüschel auf je eine Punktreihe perspectivisch so bezogen, dass die beiden Geraden, auf denen diese Punktreihen liegen, gegen einander windschief sind, so können beide Punktreihen (nach a.) auf dasselbe Ebenenbüschel perspectivisch so bezogen werden, dass drei beliebigen Strahlen des gegebenen Strahlbüschels drei beliebige Ebenen des gegebenen Ebenenbüschels zugeordnet werden.

Durch die angegebenen Constructionen ist die Möglichkeit nachgewiesen, zwei gegebene Grundgebilde erster Stufe durch eine endliche Anzahl von

Hülfsgebilden projectivisch so auf einander zu beziehen, dass drei gegebenen Elementen des einen drei vorgeschriebene Elemente des anderen entsprechen.

Es lässt sich aber ferner zeigen,

dass, wie auch diese Construction ausgeführt werden möge, jedem vierten Elemente des einen Gebildes stets ein bestimmtes, von der Wahl der Hülfsgebilde nicht abhängendes viertes Element des anderen Gebildes entspricht, und umgekehrt.

Dieses ist der Hauptsatz der projectivischen Geometrie.

Der im Folgenden mitzutheilende elementare, rein geometrische Beweis dieses Lehrsatzes stützt sich auf einige Hülfssätze, welche projectivisch ähnliche Punktreihen betreffen.

Wenn die projectivische Beziehung zwischen zwei oder mehreren Punktreihen

$$\alpha\beta\gamma\delta\ldots,\ \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots,\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots,\ \ldots,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

ausschliesslich durch Büschel von parallelen Strahlen vermittelt wird, in der Art, dass die Punktreihen

$\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ zu einem Büschel von parallelen Strahlen $abcd\ldots$,

$\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$ zu einem Büschel von parallelen Strahlen $a_1b_1c_1d_1\ldots$,

u. s. w.

perspectivisch sind, so heissen zwei derartig auf einander bezogene Punktreihen projectivisch ähnlich. Diese Eigenschaft soll durch

$$\alpha\beta\gamma\delta\ldots \sim \alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

bezeichnet werden.

Liegen die beiden Strahlbüschel $abcd\ldots$ und $a_1b_1c_1d_1\ldots$ in verschiedenen Ebenen, so sind sie zu einem von parallelen Ebenen gebildeten Ebenenbüschel perspectivisch. Von der Schaar der Geraden $\alpha\alpha_2, \beta\beta_2, \gamma\gamma_2, \delta\delta_2, \ldots$ liegt je eine in einer Ebene dieses Büschels.

Liegen die beiden Geraden, welchen die Punktreihen $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$ angehören, in der nämlichen Ebene, so geht durch den Schnittpunkt dieser beiden Geraden auch diejenige, welche die Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ enthält, und die Geraden $\alpha\alpha_2, \beta\beta_2, \gamma\gamma_2, \delta\delta_2, \ldots$ sind einander parallel. Diesem

besonderen Falle des Desargues'schen Satzes kann folgende Fassung gegeben werden:

Hülfssatz (1). Bewegt sich ein veränderliches Dreieck in der Weise, dass zwei Ecken desselben gegebene Gerade durchlaufen, während die Seiten des Dreiecks sich selbst parallel bleiben, so durchläuft stets auch die dritte Ecke desselben eine Gerade. Entweder schneiden die drei Geraden einander in demselben Punkte, oder sie sind einander parallel.

Die Geltung des vorstehenden Hülfssatzes erstreckt sich auch auf den Grenzfall, in welchem die drei von den Ecken des Dreiecks beschriebenen Geraden in derselben Ebene liegen. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung kann dadurch geführt werden, dass eine dem ausgesprochenen Hülfssatze entsprechende räumliche Figur durch parallele Strahlen auf eine Ebene projicirt wird, da es stets möglich ist, zu einer gegebenen, dem ausgesprochenen Hülfssatze entsprechenden ebenen Figur eine derselben Bedingung genügende räumliche Figur zu construiren, so dass die erstere als eine durch parallele Strahlen erhaltene Projection der letzteren angesehen werden kann.

Hülfssatz (2). Die projectivische Beziehung zweier projectivisch ähnlichen Punktreihen ist durch zwei Paare entsprechender Punkte α, α' und β, β' eindeutig bestimmt.

Werden die Punktreihen und die von parallelen Geraden gebildeten Strahlbüschel, durch welche die projectivisch ähnliche Beziehung der Punktreihen auf einander vermittelt wird, durch parallele Strahlen auf eine Hülfsebene projicirt, so ergeben sich aus den von parallelen Geraden gebildeten Strahlbüscheln wiederum Strahlbüschel, die von parallelen Geraden gebildet werden. Es ergeben sich daher aus den projectivisch ähnlichen Punktreihen wieder projectivisch ähnliche Punktreihen. Demnach genügt es offenbar, den ausgesprochenen Hülfssatz für den speciellen Fall zu beweisen, in welchem sämmtliche Punktreihen

$$\alpha\beta\gamma\delta\ldots,\ \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots,\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots,\ \ldots,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

auf Geraden liegen, die derselben Ebene angehören.

In Fig. 2 mögen die Punktreihen $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$, $\ldots$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ und die von parallelen Geraden gebildeten Strahlbüschel $abcd\ldots$,

$a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$, $a_2 b_2 c_2 d_2 \ldots$, ... die im Vorhergehenden angegebene Bedeutung haben, mit der Festsetzung, dass alle diese Grundgebilde in derselben Ebene liegen.

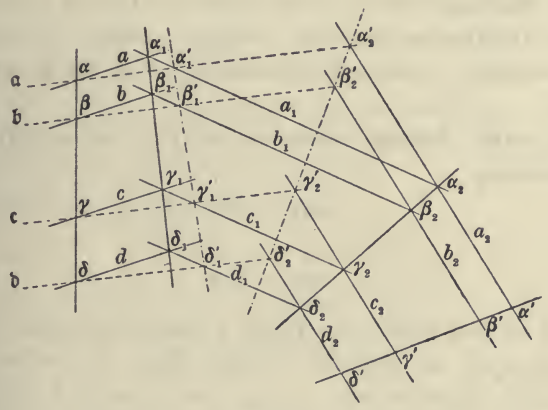


Fig. 2.

Es bezeichne $\mathfrak{abcd}\ldots$ ein beliebiges zu der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ perspectivisches, von parallelen Geraden gebildetes Strahlbüschel. Nach dem Hülfssatze (1) sind die beiden Strahlbüschel $\mathfrak{abcd}\ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ zu derselben Punktreihe $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1\ldots$ perspectivisch.

Ohne dass die projectivisch ähnliche Beziehung der beiden Punktreihen $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ geändert wird, kann das Strahlbüschel $abcd\ldots$ durch das Strahlbüschel $\mathfrak{abcd}\ldots$, die Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ durch die Punktreihe $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1\ldots$ ersetzt werden. Nach dem Hülfssatze (1) sind die beiden Strahlbüschel $\mathfrak{abcd}\ldots$ und $a_2 b_2 c_2 d_2\ldots$ zu derselben Punktreihe $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2\ldots$ perspectivisch. Es kann also die Punktreihe $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$ und das Strahlbüschel $a_1 b_1 c_1 d_1$ ausgeschaltet und von dem Strahlbüschel $\mathfrak{abcd}\ldots$ zu der Punktreihe $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2\ldots$, von dieser zu dem Strahlbüschel $a_2 b_2 c_2 d_2\ldots$ übergegangen werden, ohne dass die projectivisch ähnliche Beziehung der beiden Punktreihen $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ geändert wird.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens ergiebt sich schliesslich, dass zwei beliebige von parallelen Geraden gebildete Strahlbüschel $\mathfrak{abcd}\ldots$ und $\mathfrak{a'b'c'd'}\ldots$, von welchen das eine zu der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, das andere zu

der Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ perspectivisch ist, stets zu derselben Punktreihe $\alpha''\beta''\gamma''\delta''\ldots$ perspectivisch sind. Da nun die Gerade, welcher die Punktreihe $\alpha''\beta''\gamma''\delta''\ldots$ angehört, bereits durch zwei ihrer Punkte α'', β'' bestimmt ist, so ist der einem beliebigen Punkte γ der ersten Punktreihe entsprechende Punkt γ' der zweiten Punktreihe eindeutig bestimmt, sobald die den Punkten α, β der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ entsprechenden Punkte α', β' der Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ bekannt sind.

Hülfssatz (3). Besteht zwischen fünf Punkten α, β, β', γ, γ' einer Geraden die Beziehung

$$\alpha\beta\beta' \sim \alpha\gamma\gamma',$$

so ist auch

$$\alpha\beta\gamma \sim \alpha\beta'\gamma'.$$

Auf einer zweiten durch den Punkt α hindurchgehenden Geraden mögen drei Punkte β_1, γ_1, β_1' so bestimmt werden, dass die beiden Punktgruppen $\alpha\beta_1\gamma_1\beta_1'$ und $\alpha\beta\gamma\beta'$ congruent sind.

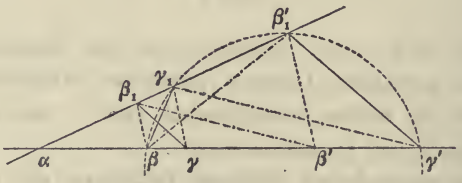


Fig. 3.

Werden hierauf die Geraden $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\beta'\beta_1'$, $\beta\gamma_1$, $\beta_1\gamma$, $\beta_1'\gamma'$, $\beta_1\beta'$, $\gamma_1\gamma'$ und $\beta\beta_1'$ construirt, so ergiebt sich in Folge des Parallelismus der Geraden $\beta\beta_1$, $\beta'\beta_1'$, dass $\alpha\beta\beta' \sim \alpha\beta_1\beta_1'$. Da nun nach der Voraussetzung $\alpha\beta\beta' \sim \alpha\gamma\gamma'$, so ist auch $\alpha\beta_1\beta_1' \sim \alpha\gamma\gamma'$, und es sind mithin, auf Grund des Hülfssatzes (2), die beiden Geraden $\beta_1\gamma$ und $\beta_1'\gamma'$ parallel. Andererseits sind sowohl die beiden Dreiecke $\alpha\beta_1\gamma$ und $\alpha\beta\gamma_1$, als auch die beiden Dreiecke $\alpha\beta\beta_1'$ und $\alpha\beta_1\beta'$ congruent.

Zwei Strahlenpaare (a,b) und (a',b'), welche derselben Ebene angehören, sollen als gleich dann und nur dann bezeichnet werden, wenn es möglich ist, durch Verschiebung der Ebene in sich den Strahl a mit dem Strahle a' und zugleich den Strahl b mit dem Strahle b' zur Deckung zu bringen. Es ist also (a,b) im Allgemeinen nicht gleich (b,a). Sind (a,b) und

(a',b') in dem angegebenen Sinne einander gleich, so mögen nicht nur (a,b) und (b,a), sondern auch (a,b) und (b',a') als entgegengesetzt gleich bezeichnet werden. Zwei Strahlenpaare (b,a) und (b',a') sind daher auch dann einander gleich, wenn sie einem dritten Strahlenpaare (a,b) entgegengesetzt gleich sind.

Die beiden congruenten Dreiecke $\alpha\beta\gamma_1$ und $\alpha\beta_1\gamma$ können nicht durch Verschiebung in der Ebene mit einander zur Deckung gebracht werden. Es sind daher die von je zwei Paaren entsprechender Seiten dieser Dreiecke gebildeten Strahlenpaare entgegengesetzt gleich.

Es sind mithin die Strahlenpaare

$$(\alpha\gamma, \beta_1\gamma) \text{ und } (\alpha\gamma_1, \beta\gamma_1)$$

entgegengesetzt gleich, während die Strahlenpaare

$$(\alpha\gamma, \beta_1\gamma) \text{ und } (\beta\gamma_1, \alpha\gamma_1)$$

in dem angegebenen Sinne gleich sind.

In Folge des Parallelismus der Geraden $\beta_1\gamma$ und $\beta_1'\gamma'$ sind die Strahlenpaare

$$(\alpha\gamma, \beta_1\gamma) \text{ und } (\alpha\gamma', \beta_1'\gamma')$$

ebenfalls in dem angegebenen Sinne gleich. Hieraus folgt, dass auch die Strahlenpaare

$$(\beta\gamma_1, \alpha\gamma_1) \text{ und } (\alpha\gamma', \beta_1'\gamma')$$

einander gleich sind.

Nach einem elementargeometrischen Satze haben die Scheitel zweier gleichen Winkel und die Schnittpunkte der beiden Paare entsprechender Schenkel von einem bestimmten Punkte der Ebene gleiche Entfernungen. Dies gilt von den Punkten $\gamma_1, \gamma', \beta, \beta_1'$. Nach der Umkehrung dieses Satzes sind die Strahlenpaare

$$(\beta\beta_1', \gamma_1\beta_1') \text{ und } (\beta\gamma', \gamma_1\gamma')$$

einander gleich. In Folge der Congruenz der Dreiecke $\alpha\beta\beta_1'$ und $\alpha\beta_1\beta'$ ist das Strahlenpaar $(\beta\beta_1', \gamma_1\beta_1')$ dem Strahlenpaare $(\beta\beta', \beta_1\beta')$ gleich. Es sind also die Strahlenpaare

$$(\beta\beta', \beta_1\beta') \text{ und } (\beta\gamma', \gamma_1\gamma')$$

einander gleich, mit anderen Worten: die Geraden $\beta_1\beta'$ und $\gamma_1\gamma'$ sind parallel. Es ist daher

$$\alpha\beta\gamma \sim \alpha\beta_1\gamma_1 \sim \alpha\beta'\gamma'.$$

Hülfssatz (4). Jedes Strahlbüschel bestimmt auf je zwei parallelen Geraden seiner Ebene, von denen keine durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels hindurchgeht, projectivisch ähnliche Punktreihen.

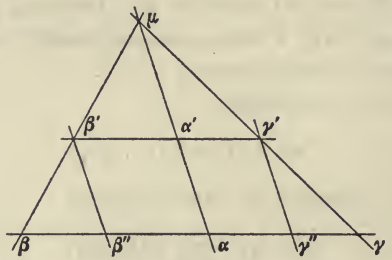


Fig. 4.

In Fig. 4 seien die beiden Geraden $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ parallel. Die durch die Punkte β' und γ' hindurchgehenden, dem Strahle $\mu\alpha$ parallelen Geraden mögen die Gerade $\alpha\beta\gamma$ in den Punkten β'' und γ'' schneiden. Es ergiebt sich

$$\mu\alpha\alpha' \sim \mu\beta\beta' \sim \alpha\beta\beta'',$$
$$\mu\alpha\alpha' \sim \mu\gamma\gamma' \sim \alpha\gamma\gamma'',$$

folglich ist

$$\alpha\beta\beta'' \sim \alpha\gamma\gamma''.$$

Nach dem Hülfssatze (3) ist $\alpha\beta\gamma \sim \alpha\beta''\gamma''$. Da nun $\alpha'\beta'\gamma' \sim \alpha\beta''\gamma''$ ist, so ist auch $\alpha\beta\gamma \sim \alpha'\beta'\gamma'$.

Hülfssatz (5). Drei von einem Punkte ausgehende, in derselben Ebene liegende Strahlen a, b, c schneiden jede Gerade einer bestimmten Richtung, welche den Schnittpunkt der drei Strahlen a, b, c nicht enthält, und keine andere, in einer Punktgruppe $\alpha'\beta'\gamma'$, welche einer gegebenen Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projectivisch ähnlich ist.

Es sei (Fig. 5) die Punktgruppe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'$ zu der Strahlengruppe abc perspectivisch und der (in der Ebene dieser Strahlengruppe liegenden) Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projectivisch ähnlich.

Es seien a', b', c' drei einander, aber nicht dem Strahle c parallele Strahlen in beliebiger Richtung, welche beziehlich durch die Punkte α, β, γ

hindurchgehen; a'', b'' seien zwei durch die Punkte α_1', β_1' hindurchgehende dem Strahle c parallele Gerade. Dann sind nach dem Hülfssatze (2) die beiden Strahlengruppen $a'b'c'$ und $a''b''c$ zu derselben Punktgruppe $\alpha''\beta''\gamma''$ perspectivisch. Von dieser Punktgruppe ist, nachdem die Richtung der Strahlen a', b', c' willkürlich angenommen worden ist, die Lage des Punktes γ'' bestimmt. Ist der Punkt α_1' vorgeschrieben, so ist zugleich die Lage des Punktes α'' bestimmt. Folglich ist durch die Lage des Punktes β auch die des Punktes β'', mithin auch die des Punktes β_1' bestimmt. Aus den Punkten α_1', β_1' ergiebt sich dann der Punkt γ_1'.

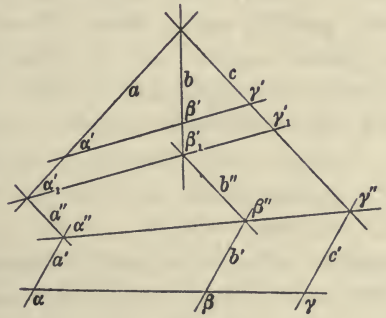


Fig. 5.

Folglich geht durch den Punkt α_1' des Strahles a nur eine Gerade, welche von den Strahlen a, b, c in einer der Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projectivisch ähnlichen Punktgruppe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'$ geschnitten wird.

Alle der Geraden $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'$ parallelen Geraden $\alpha'\beta'\gamma'$, und nur diese, werden von den Strahlen a, b, c in Punktgruppen geschnitten, welche der Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projectivisch ähnlich sind.

Hülfssatz (6). Sind zwei Strahlbüschel $abcd\ldots$ und $a_1b_1c_1d_1\ldots$, deren Mittelpunkte im Endlichen liegen, zu derselben Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ perspectivisch, so lässt sich jeder zu dem Strahlbüschel $abcd\ldots$ perspectivischen Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ eine projectivisch ähnliche Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$ zuordnen, welche zu dem Strahlbüschel $a_1b_1c_1d_1\ldots$ perspectivisch ist.

Beweis. Liegen die Strahlbüschel $abcd\ldots$ und $a_1b_1c_1d_1\ldots$ nicht in derselben Ebene, so sind sie zu einem Ebenenbüschel perspectivisch. Die

durch die Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ hindurchgehende, der Achse des Ebenenbüschels parallele Ebene schneidet die Ebene des Strahlbüschels $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ in einer Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$ und wird von dem Ebenenbüschel in einem von parallelen Geraden gebildeten Strahlbüschel $a_1' b_1' c_1' d_1' \ldots$ geschnitten. Es sind daher die beiden Strahlbüschel $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ und $a_1' b_1' c_1' d_1' \ldots$ zu der Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$ perspectivisch, welche der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivisch ähnlich ist.

Liegen die Strahlbüschel $abcd\ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ in derselben Ebene, so kann zwischen diese beiden Strahlbüschel ein drittes zu der Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ perspectivisches Strahlbüschel $a_1''b_1''c_1''d_1''\ldots$ eingeschaltet werden, zu dessen Mittelpunkt ein beliebiger, nicht in der Ebene des Strahlbüschels $abcd\ldots$ liegender Punkt gewählt werden kann. Dann findet der im Vorstehenden angegebene Beweis sowohl auf die Strahlbüschel $abcd\ldots$ und $a_1''b_1''c_1''d_1''\ldots$, als auch auf die Strahlbüschel $a_1''b_1''c_1''d_1''\ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ Anwendung. Es ist daher das Strahlbüschel $a_1''b_1''c_1''d_1''\ldots$ perspectivisch zu einer der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivisch ähnlichen Punktreihe $\alpha_1''\beta_1''\gamma_1''\delta_1''\ldots$, das Strahlbüschel $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ perspectivisch zu einer der Punktreihe $\alpha_1''\beta_1''\gamma_1''\delta_1''\ldots$ projectivisch ähnlichen Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$. Die letztere Punktreihe ist aber zugleich der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivisch ähnlich.

Der vorstehende Hülfssatz ist daher allgemein bewiesen.

Nachdem dieses vorausgeschickt ist, kann zu dem Beweise des ausgesprochenen Hauptsatzes übergegangen werden.

Da jeder andere Fall zweier projectivisch auf einander bezogenen Grundgebilde erster Stufe auf den zweier projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen zurückgeführt werden kann, so reicht es aus, den Hauptsatz für diesen Fall zu beweisen.

Die projectivische Beziehung zweier Punktreihen auf einander wird durch eine endliche Anzahl von Grundgebilden erster Stufe vermittelt. Hierbei können, ohne dass in Hinsicht auf das gegenseitige Entsprechen der Punkte beider projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen eine Änderung eintritt, die Grundgebilde, durch welche diese projectivische Beziehung vermittelt wird, in mannigfacher Weise durch andere Grundgebilde ersetzt werden.

Jedes unter den erwähnten Grundgebilden etwa enthaltene von parallelen Ebenen gebildete Ebenenbüschel kann ersetzt werden durch eine Punktreihe

und höchstens zwei zu ihr perspectivische, von parallelen Geraden gebildete Strahlbüschel, oder durch ein von parallelen Geraden gebildetes Strahlbüschel und höchstens zwei zu diesem perspectivische Punktreihen. Hierbei sind die ersetzenden Gebilde perspectivisch zu dem Gebilde, welches sie ersetzen. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann also angenommen werden, dass unter den die projectivische Beziehung der beiden Punktreihen vermittelnden Grundgebilden sich kein von parallelen Ebenen gebildetes Ebenenbüschel befindet.

Jedes unter den erwähnten Grundgebilden etwa enthaltene, von parallelen Geraden gebildete Strahlbüschel kann durch eine zu ihm perspectivische Punktreihe, oder durch ein zu ihm perspectivisches Ebenenbüschel, dessen Achse im Endlichen liegt, ersetzt werden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann demnach die Annahme gemacht werden, dass unter den die projectivische Beziehung der beiden Punktreihen vermittelnden Grundgebilden sich weder ein von parallelen Ebenen gebildetes Ebenenbüschel, noch ein von parallelen Geraden gebildetes Strahlbüschel befindet.

Jedes unter den erwähnten Grundgebilden etwa enthaltene Ebenenbüschel, dessen Achse im Endlichen liegt, kann ersetzt werden durch eine zu ihm perspectivische Punktreihe und höchstens zwei zu dieser und zu dem Ebenenbüschel perspectivische Strahlbüschel, oder durch ein zu dem Ebenenbüschel perspectivisches Strahlbüschel und höchstens zwei zu ihm perspectivische Punktreihen. Hierbei kann in allen Fällen die Ersetzung so vorgenommen werden, dass die Mittelpunkte dieser Strahlbüschel im Endlichen liegen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich die Folgerung:

Um den Hauptsatz der projectivischen Geometrie allgemein zu beweisen, reicht es aus, die Richtigkeit desselben für zwei projectivisch auf einander bezogene Punktreihen unter der Voraussetzung darzuthun, dass die Grundgebilde, durch welche die projectivische Beziehung dieser Punktreihen vermittelt wird, nur Strahlbüschel und Punktreihen sind, während überdies die Mittelpunkte aller dieser Strahlbüschel im Endlichen liegen.

Die beiden in der angegebenen Weise projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen seien $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$.

Zu der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sei perspectivisch das Strahlbüschel $abcd\ldots$, zu diesem die Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$;

zu der Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ sei perspectivisch das Strahlbüschel $a_1b_1c_1d_1\ldots$, zu diesem die Punktreihe $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$; u. s. w.

Zu dem Strahlbüschel $a_nb_nc_nd_n\ldots$ endlich sei perspectivisch die Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$.

Auf je zwei benachbarte Strahlbüschel der Reihe

$$abcd\ldots,\ a_1b_1c_1d_1\ldots,\ a_2b_2c_2d_2\ldots,\ \ldots,\ a_nb_nc_nd_n\ldots$$

findet nun der Hülfssatz (6) Anwendung.

Das Strahlbüschel $a_1b_1c_1d_1\ldots$ ist perspectivisch zu einer Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivisch ähnlich ist.

Das Strahlbüschel $a_2b_2c_2d_2\ldots$ ist perspectivisch zu einer Punktreihe $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\delta_2'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$, mithin auch der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, projectivisch ähnlich ist.

Durch Fortsetzung dieser Schlussweise ergiebt sich: Das Strahlbüschel $a_nb_nc_nd_n\ldots$, welches zu der zur Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivischen Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ perspectivisch ist, ist auch perspectivisch zu einer Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\delta_n'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projectivisch ähnlich ist.

Da nach dem Hülfssatze (5) die Strahlengruppe $a_nb_nc_n$ nur die Geraden einer bestimmten Richtung in Punktgruppen $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'$ schneidet, welche der Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projectivisch ähnlich sind, so ist die Punktgruppe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'$ durch einen ihrer Punkte, etwa α_n', eindeutig bestimmt.

Aus dem Hülfssatze (2) ergiebt sich sodann, dass durch jeden vierten Punkt δ der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ der entsprechende Punkt δ_n' der projectivisch ähnlichen Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\delta_n'\ldots$ eindeutig bestimmt ist. Es ist daher auch der entsprechende Strahl d_n und der Punkt δ' eindeutig durch den Punkt δ bestimmt.

Der Hauptsatz der projectivischen Geometrie ist hierdurch rein geometrisch bewiesen.

ZUR DIOPTRIK.

(Aus einem zu Wien am 22. September 1856 in der mathematischen Section der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte gehaltenen Vortrage.)

Im Nachstehenden theile ich eine geometrische Construction mit, durch welche man den Weg eines durch mehrere an einander grenzende isophane Mittel gehenden Lichtstrahles in dem Falle, wo sämmtliche brechende Flächen sphärisch sind, in aller Strenge verfolgen kann.

Offenbar genügt es dabei, den Fall, wo nur eine brechende Fläche vorhanden ist, zu betrachten. Unter dieser Voraussetzung sei M der Mittelpunkt und r der Radius der Kugelfläche, von welcher die brechende Fläche ein Theil ist.

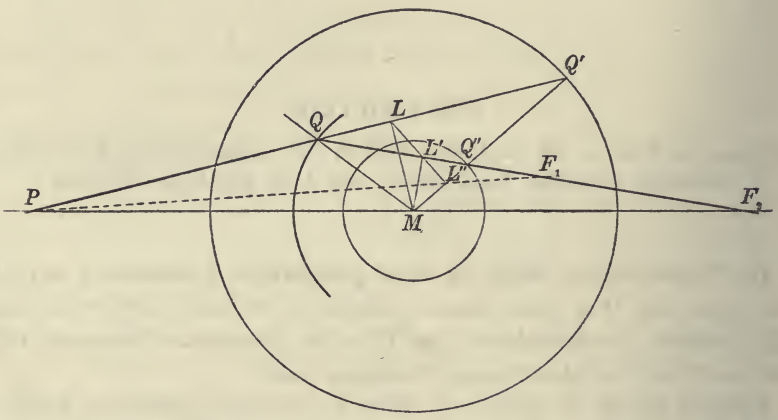
Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes für das erste Mittel werde mit n und für das zweite mit n' bezeichnet, wo also, wofern man unter Voraussetzung der Undulationstheorie des Lichtes die Geschwindigkeit desselben im freien Äther als Einheit annimmt, diese Grössen echte Brüche sind, deren Werthe von der Beschaffenheit der beiden Mittel abhängen.

Um den Mittelpunkt M beschreibe man noch zwei andere Kugelflächen, mit den Radien

$$\frac{n}{n'}r, \quad \frac{n'}{n}r,$$

welche die erste und die zweite Hülfsfläche genannt werden mögen. Der einfallende Strahl (in der Figur mit PQ bezeichnet) treffe nun die brechende Fläche in einem Punkte Q, und gehörig verlängert die erste Hülfsfläche in Q', wobei man, falls der Radius der letzteren kleiner ist als der der ersteren,

von den beiden alsdann stattfindenden Schnittpunkten den von Q am weitesten entfernten zu nehmen hat. Verbindet man sodann M mit Q' durch eine Gerade, so schneidet diese oder ihre Verlängerung über Q' hinaus die zweite Hülfsfläche in einem Punkte Q'', durch welchen der gebrochene Strahl geht, dessen Weg daher durch die Gerade QQ'' bezeichnet wird.



Zum Beweise verbinde man M mit Q durch eine Gerade, so haben die beiden Dreiecke QMQ' und $Q''MQ$ einen gemeinschaftlichen Winkel, und da der Construction zufolge

$$MQ' : MQ = n : n',$$
$$MQ : MQ'' = n : n',$$

so sind sie ähnlich. Fällt man daher auf die homologen Seiten QQ', $Q''Q$ von M aus die Lothe ML, ML', so verhalten sich auch diese wie n zu n', und da

$$ML = MQ \sin(MQQ'), \quad ML' = MQ \sin(MQQ''),$$

so hat man

$$\frac{\sin(MQQ')}{\sin(MQQ'')} = \frac{n}{n'}.$$

Nun ist aber QM die Normale der brechenden Fläche im Punkte Q, QQ' die Richtung des aus dem ersten Mittel kommenden Strahles, und somit der Winkel MQQ' der Einfallswinkel desselben. Ferner liegt der Construction

zufolge der Punkt L in jedem Falle zwischen den Punkten Q und Q' und daher liegt auch der Punkt L' zwischen den Punkten Q und Q'', so dass der Winkel MQQ'' ebenso wie der Winkel MQQ' ein spitzer Winkel ist. Überdies liegen QQ'' und QQ' mit QM in einer Ebene und zwar an derselben Seite von QM und somit bezeichnet, nach dem bekannten Brechungsgesetz, in der That QQ'' den Weg des gebrochenen Strahles.

Aus der vorstehenden Construction lassen sich nun nicht nur die gebräuchlichen dioptrischen Näherungsformeln mit Leichtigkeit herleiten, sondern auch die Grenzen feststellen, innerhalb welcher diese Formeln in bestimmten Fällen hinlängliche Genauigkeit darbieten; worauf ich jedoch hier nicht eingehe.

* * *

Es sei P ein innerhalb des ersten Mittels liegender leuchtender Punkt. Es werde der vom Punkte P ausgehende Lichtstrahl, welcher die brechende Fläche im Punkte Q trifft, und der durch die angegebene Construction sich ergebende zu dem Strahl PQ gehörende gebrochene Strahl QQ'' betrachtet.

Jedem vom Punkte P ausgehenden, dem Strahl PQ unendlich benachbarten Strahl entspricht ein dem Strahl QQ'' unendlich benachbarter gebrochener Strahl. Unter den letzteren sind diejenigen ausgezeichnet, welche den Strahl QQ'' schneiden. Es sind dies

erstens, die in der Einfallsebene PMQ liegenden gebrochenen Strahlen,

zweitens, die mit den Seiten des Rotationskegels zusammenfallenden Strahlen, welcher durch Rotation der Figur $PMQQ''$ um die Gerade PM als Axe entsteht und dessen Mantelfläche bei dieser Rotation von der Geraden QQ'' beschrieben wird.

Bezeichnet nun

F_1 den Schnittpunkt des gebrochenen Strahls QQ'' mit dem in der Einfallsebene PMQ liegenden unendlich benachbarten gebrochenen Strahl,

F_2 den Mittelpunkt der erwähnten Kegelfläche, also den Schnittpunkt der beiden Geraden PM und QQ'',

so ergiebt sich, dass das durch die vier Punkte Q, Q'', F_1, F_2 bestimmte Doppelverhältniss den Werth

$$(Q, Q'', F_1, F_2) = \frac{\cos^2(MQQ'')}{\cos^2(MQQ')}$$

besitzt.

Diese Eigenschaft führt zu folgender Construction des Punktes F_1.

Man verbinde die beiden Punkte L und L' durch eine Gerade. Die Gerade LL' schliesst mit der Geraden $MQ''Q'$ einen rechten Winkel ein. Den Schnittpunkt L'' beider Geraden verbinde man mit dem Punkte P durch eine Gerade. Diese schneidet den gebrochenen Strahl QQ'' im Punkte F_1.

ZWEI SPECIELLE FLÄCHEN VIERTER ORDNUNG.

(Aus Jacob Steiner's Gesammelten Werken, Bd. II, S. 741—742 mit geringer Veränderung abgedruckt.)

Die erste dieser Flächen ist diejenige, welche man gegenwärtig die »Steiner'sche Fläche« zu nennen gewohnt ist. Steiner hatte sich mit derselben besonders während seines Aufenthalts in Rom (1844) beschäftigt, und pflegte deshalb von ihr als seiner »Römerfläche« zu reden, hat aber niemals etwas darüber veröffentlicht. Es waren ihm nämlich Zweifel darüber geblieben, ob die Fläche, wie er durch Betrachtungen, die ihm selbst nicht genügten, gefunden hatte, wirklich vom vierten, und nicht etwa vom sechsten Grade sei. Möglicherweise nämlich, meinte er, könne der Durchschnitt der Fläche mit jeder ihrer Tangentialebenen aus zwei vollen und einem beständig imaginär bleibenden Kegelschnitt bestehen, so dass die Fläche, wie er sich ausdrückte, von einem »Gespenst« begleitet wäre. Dass er über diesen Punkt mit den ihm gewohnten Betrachtungsweisen nicht in's Klare zu kommen vermochte, verdross ihn so sehr, dass er lange Zeit sich nicht entschliessen konnte, einem Analytiker die Sache zur Prüfung vorzulegen. Erst etwa ein Jahr vor seinem Tode sprach er mit mir über seine Fläche und ersuchte mich, was er darüber gefunden, analytisch zu verificiren. Dies war nicht schwierig. Sind

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

die Gleichungen dreier Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben gegebene Punkte gehen, in gewöhnlichen Coordinaten, so hat jede andere, durch dieselben Punkte gehende Fläche gleicher Ordnung die Gleichung

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0,$$

wo λ, μ, ν veränderliche Parameter bedeuten. Nach dem Satze, von welchem Steiner ausgeht — der übrigens schon früher von O. Hesse (Crelle's Journal Band 18, Seite 110) gefunden und analytisch bewiesen worden war —, gehört nun jeder solchen Fläche in Beziehung auf eine gegebene Fläche F_0^2 und einen auf dieser angenommenen festen Punkt A ein Pol; für die Coordinaten (x, y, z) desselben ergeben sich Ausdrücke von der Form

$$x = \frac{F_1(\lambda, \mu, \nu)}{F(\lambda, \mu, \nu)}, \quad y = \frac{F_2(\lambda, \mu, \nu)}{F(\lambda, \mu, \nu)}, \quad z = \frac{F_3(\lambda, \mu, \nu)}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

wo F, F_1, F_2, F_3 ganze und homogene Functionen zweiten Grades von λ, μ, ν bedeuten, und es lassen sich dann aus diesen Ausdrücken die im Text angegebenen Eigenschaften der Steiner'schen Fläche mit Leichtigkeit ableiten.

Steiner hat von dem, was ich damals für ihn aufschrieb, keinen Gebrauch gemacht. Als aber nicht lange nachher mein Freund Kummer bei einer Untersuchung »über Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen« die in Rede stehende merkwürdige Fläche ebenfalls entdeckt hatte, theilte ich ihm mit, was ich von Steiner darüber erfahren. Hierauf sich beziehend hat Herr Kummer, als er (am 16. Juli 1863) die genannte Abhandlung in der Akademie las, die Fläche als eine von Steiner entdeckte bezeichnet, wodurch ich veranlasst wurde, was ich von Steiner's auf dieselbe sich beziehenden Untersuchungen wusste, noch in derselben Akademie-Sitzung vollständig mitzutheilen. Seitdem haben sich die Geometer vielfach mit der Steiner'schen Fläche beschäftigt, ausser Kummer namentlich Schröter, Cremona, Clebsch. Die kurze Notiz, welche ich über dieselbe in die Ausgabe der Steiner'schen Werke aufnehmen zu müssen geglaubt habe, stimmt im Wesentlichen mit der in dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom Jahre 1863 (S. 339) von mir gegebenen überein. Die geringen Abweichungen haben ihren Grund darin, dass ich damals aus der Erinnerung referirte, jetzt aber mich genau an die erwähnte, für Steiner gemachte Aufzeichnung halten konnte.

Die unter (II) mitgetheilte Aufgabe*) wurde mir von Steiner bei Gelegenheit einer von ihm unternommenen Untersuchung über confocale Flächen zweiten Grades vorgelegt (1860). Indem ich die Gleichung der definirten

*) [S. die Anmerkung S. 182.]

Fläche herleitete, fand ich, dass sie in dem Falle, wo sie wirklich vom vierten Grade ist, nämlich, wenn die gegebene Fläche zweiten Grades einen Mittelpunkt hat, ohne eine Kegelfläche zu sein, mit Hülfe einer zweiten Fläche desselben Grades, die zu der gegebenen in naher Beziehung steht, ebenso geometrisch construirt werden kann wie die Fresnel'sche Wellenfläche durch Vermittelung eines Ellipsoides. Hat die gegebene Fläche zweiten Grades keinen Mittelpunkt, oder ist sie eine Kegelfläche, so ist die von Steiner definirte Fläche von niedrigerem als dem vierten Grade.

Um alle Fälle zu umfassen, werde die Gleichung der gegebenen Fläche, bezogen auf ein orthogonales Axensystem, in der Form

$$F = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + D = 0 \quad .$$

angenommen. Setzt man dann

$$\begin{aligned} G = {} & (B+C)(Ax^2 + 2A_1x) + (C+A)(By^2 + 2B_1y) \\ & + (A+B)(Cz^2 + 2C_1z) + (A+B+C)D - A_1^2 - B_1^2 - C_1^2, \\ H = {} & BC(Ax^2 + 2A_1x) + CA(By^2 + 2B_1y) + AB(Cz^2 + 2C_1z) \\ & + (BC + CA + AB)D - (B+C)A_1^2 - (C+A)B_1^2 - (A+B)C_1^2, \\ K = {} & ABCD - BCA_1^2 - CAB_1^2 - ABC_1^2; \end{aligned}$$

so ist die Gleichung der gesuchten Fläche

$$GH - KF = 0.$$

In dem angegebenen allgemeinen Falle kann man

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0, \quad D = -1$$

annehmen; setzt man dann

$$\alpha = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{1}{C} + \frac{1}{A}, \quad \gamma = \frac{1}{A} + \frac{1}{B},$$

so erhält die Gleichung der Fläche die Form

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) - \alpha(\beta+\gamma)x^2 - \beta(\gamma+\alpha)y^2 - \gamma(\alpha+\beta)z^2 + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Die Fläche ist also, wenn A, B, C alle drei positiv sind, eine Fresnel'sche Wellenfläche, und lässt sich auch in den übrigen Fällen in ähnlicher Weise, wie diese, construiren.

ANMERKUNG.

Die auf S. 180 erwähnte Aufgabe (J. Steiner's Ges. Werke, Bd. II, S. 724) lautet:

Unter den Tangenten-Kegeln einer Fläche zweiter Ordnung giebt es stets Rotationskegel; der Ort ihrer Scheitel ist bekanntlich eine Linie.

Dem Rotationskegel, welcher von allen Ebenen, die einer von seinen Haupt-Diametralebenen parallel sind, in Kreisen geschnitten wird, steht in ähnlicher Weise, wie die gleichseitige Hyperbel dem Kreise, gegenüber ein besonderer Kegel zweiter Ordnung, welcher von allen Ebenen, die einer von seinen Haupt-Diametralebenen parallel sind, in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird. Unter den Tangential-Kegeln einer Fläche zweiter Ordnung giebt es stets auch Kegel dieser Art; der Ort ihrer Scheitel ist aber eine Fläche, und zwar im Allgemeinen eine Fläche vierter Ordnung. Wie wird dieselbe geometrisch construirt?

ÜBER EINE DIE RAUMCURVEN CONSTANTER KRÜMMUNG BETREFFENDE, VON DELAUNAY HERRÜHRENDE AUFGABE DER VARIATIONSRECHNUNG.

In seiner Preisschrift »Mémoire sur le calcul des variations«, Journal de l'École Polytechnique, tome XVII (1843), cahier 29, p. 37—120, behandelt Delaunay die Aufgabe:

> Von allen Curven vorgeschriebener constanter Krümmung, welche zwischen zwei gegebenen Punkten stetig und ohne plötzliche Richtungsänderung verlaufen, diejenigen zu bestimmen, deren Bogenlänge ein Maximum oder Minimum ist.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von den gewöhnlich in der Variationsrechnung behandelten, bei welchen die zu ermittelnden Functionen, die bewirken, dass ein bestimmtes Integral ein Maximum oder Minimum wird, noch gewissen Nebenbedingungen unterworfen sind, dadurch nicht unwesentlich, dass diese Nebenbedingungen nicht ebenfalls in der Form bestimmter Integrale von vorgeschriebenen Werthen, sondern zunächst in der Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung gegeben sind. Das Problem, welches später noch von Jellett, »An elementary treatise on the calculus of variations« (1850), p. 194—202; ferner von Todhunter, »A history of the progress of the calculus of variations« (1861), p. 164—179 und Lindelöf, »Leçons de calcul des variations« (1861), p. 284—289 behandelt wurde, ist weder von Delaunay, noch von den anderen eben genannten Mathematikern vollständig in der Weise gelöst worden, dass erstens die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen, von deren Integration die Lösung der Aufgabe abhängt,

sich vollständig angeben lassen, sodann aber Untersuchungen über die zweite Variation oder über eine Entscheidung darüber angestellt sind, in welchem Falle unter der Voraussetzung, dass die Glieder der ersten Variation verschwinden, wirklich ein Maximum, ein Minimum, oder auch keines von beiden eintritt.

Im Folgenden soll zunächst die Frage nach der Darstellung der allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen des Problems behandelt werden; es wird sich ergeben, dass die Bestimmung der gesuchten Curve im allgemeinsten Falle mit Hülfe der elliptischen Transcendenten möglich ist.

1.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der zu bestimmenden Curve und als Functionen einer reellen Veränderlichen t betrachtet, welche innerhalb eines bestimmten Intervalles $(t_0 \dots t_1)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind. Die bestimmten Werthe t_0 und t_1 des Argumentes t, von denen t_1 als der grössere vorausgesetzt wird, sollen den gegebenen Punkten der Curve zukommen.

Das Bogendifferential ds der betrachteten Curve ist alsdann durch die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

das zu variirende Integral also durch den Ausdruck

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1.}$$

gegeben. Die Functionen x, y, z sind ferner noch der Bedingung zu unterwerfen, dass die Curve in jedem ihrer Punkte eine und dieselbe constante Krümmung, deren Werth stets gleich 1 genommen werden kann, besitzen soll; es besteht also noch die Differentialgleichung

$$\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = 1 \tag{2.}$$

oder

$$P^2 + Q^2 + R^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = 0, \tag{2a.}$$

in welcher zur Abkürzung

$$P = \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Q = \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$R = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

gesetzt ist.

Variirt man nun das Integral S, indem man die Grössen x, y, z durch die Grössen $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$ ersetzt, unter $\delta x, \delta y, \delta z$ unendlich kleine Functionen der Variablen t verstehend, so hat man diese so anzunehmen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten und zweiten Ableitungen stetige Functionen ihres Arguments t sind, welche der Bedingung

$$P\delta P + Q\delta Q + R\delta R - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^5 \cdot \delta\frac{ds}{dt} = 0 \tag{3.}$$

Genüge leisten. Diese Gleichung geht unter Einführung der Bezeichnungen

$$X = R\frac{d^2y}{dt^2} - Q\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$Y = P\frac{d^2z}{dt^2} - R\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Z = Q\frac{d^2x}{dt^2} - P\frac{d^2y}{dt^2};$$

$$X_1 = Q\frac{dz}{dt} - R\frac{dy}{dt},$$

$$Y_1 = R\frac{dx}{dt} - P\frac{dz}{dt},$$

$$Z_1 = P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt}$$

in die folgende über

$$\left\{X - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\frac{dx}{dt}\right\}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \left\{Y - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\frac{dy}{dt}\right\}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \left\{Z - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\frac{dz}{dt}\right\}\cdot\frac{d\delta z}{dt}$$
$$+ X_1\frac{d^2\delta x}{dt^2} + Y_1\frac{d^2\delta y}{dt^2} + Z_1\frac{d^2\delta z}{dt^2} = 0, \tag{3a.}$$

von welcher die linke Seite zur Abkürzung mit T bezeichnet werden möge.

Soll das Integral S ein Maximum oder Minimum werden, so muss die erste Variation

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{ds} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{ds} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{ds} \frac{d\delta z}{dt} \right) dt$$

gleich Null werden für je drei beliebige Functionen δx, δy, δz von der angegebenen Beschaffenheit, welche der vorstehenden Gleichung (3a.) und den für die Punkte (t_0) und (t_1) vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügen. Daraus folgt aber, dass wenn ε eine willkürlich anzunehmende Function des Arguments t bezeichnet, auch die Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{ds} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{ds} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{ds} \frac{d\delta z}{dt} - \varepsilon T \right) dt = 0 \tag{4.}$$

bestehen muss.

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden: Entweder ist die Anfangsrichtung der Curve im Punkte (t_0) und ihre Endrichtung im Punkte (t_1) keiner Beschränkung unterworfen, d. h. die Variationen $\frac{d\delta x}{dt}, \frac{d\delta y}{dt}, \frac{d\delta z}{dt}$ sind auch in den Punkten (t_0) und (t_1) willkürlich zu wählen; oder aber es sind für die Richtungen der Curve in den Punkten (t_0) und (t_1) beliebige, aber bestimmte Werthe vorgeschrieben. Im ersteren Falle ist es leicht, nachzuweisen, dass die Curve der constanten Krümmung 1, für welche das Integral S ein Maximum oder Minimum wird, eine ebene, also ein Bogen eines Kreises vom Halbmesser 1 ist. Es ist demnach für die Aufgabe in diesem Falle, auf den im Übrigen nicht weiter eingegangen werden soll, nur dann eine Lösung vorhanden, wenn der Abstand der beiden gegebenen Punkte höchstens gleich 2 ist.

In dem anderen, im Folgenden näher zu untersuchenden Falle, in welchem also den Grössen $\frac{d\delta x}{dt}, \frac{d\delta y}{dt}, \frac{d\delta z}{dt}$ sowohl für $t = t_0$, als auch für $t = t_1$ der Werth Null beizulegen ist, gestaltet sich die Gleichung (4.) durch Anwendung einer partiellen Integration in die folgende um:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(X_2 \frac{d\delta x}{dt} + Y_2 \frac{d\delta y}{dt} + Z_2 \frac{d\delta z}{dt} \right) dt = 0, \tag{5.}$$

in welcher

$$X_2 = \frac{dx}{ds} - \varepsilon\left(X - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\varepsilon X_1),$$
$$Y_2 = \frac{dy}{ds} - \varepsilon\left(Y - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{dy}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\varepsilon Y_1),$$
$$Z_2 = \frac{dz}{ds} - \varepsilon\left(Z - 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{dz}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\varepsilon Z_1)$$

gesetzt ist. Betrachtet man nun die Coordinaten x, y, z als Functionen der von einem beliebig anzunehmenden Punkte aus gerechneten Bogenlänge s, so lässt sich den vorstehenden Functionen X_2, Y_2, Z_2 eine Gestalt geben, in welcher sie als lineare Functionen der Grössen

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z'$$

und deren ersten und zweiten Ableitungen nach der Variablen s erscheinen. Zu dem Zweck werde

$$\overline{P} = y'\frac{dz'}{ds} - z'\frac{dy'}{ds},$$
$$\overline{Q} = z'\frac{dx'}{ds} - x'\frac{dz'}{ds},$$
$$\overline{R} = x'\frac{dy'}{ds} - y'\frac{dx'}{ds}$$

gesetzt; es ergeben sich dann für die Grössen P, Q, R unter Berücksichtigung der Formeln

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{ds}{dt},$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + x'\frac{d^2s}{dt^2}$$

und der entsprechenden für $\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ die folgenden Ausdrücke

$$P = \overline{P}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$
$$Q = \overline{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$
$$R = \overline{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Daraus folgt

$$X_1 = (\bar{Q}z' - \bar{R}y')\left(\frac{ds}{dt}\right)^4;$$

für die auf der rechten Seite dieses Ausdrucks stehende Determinante

$$\bar{Q}z' - \bar{R}y' = (y'^2 + z'^2)\cdot\frac{dx'}{ds} - x'\left(y'\frac{dy'}{ds} + z'\frac{dz'}{ds}\right)$$

ergiebt sich unter Anwendung der Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \tag{6.}$$

der einfache Werth $\frac{dx'}{ds}$. Man erhält somit nach Ausführung der entsprechenden Rechnungen das folgende Formelsystem:

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{Q}z' - \bar{R}y' = \dfrac{dx'}{ds}, & X_1 = \dfrac{dx'}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4, \\ \bar{R}x' - \bar{P}z' = \dfrac{dy'}{ds}, & Y_1 = \dfrac{dy'}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4, \\ \bar{P}y' - \bar{Q}x' = \dfrac{dz'}{ds}, & Z_1 = \dfrac{dz'}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4. \end{array}\right. \tag{7.}$$

Aus den vorstehenden zweiten Ableitungen der Grössen x, y, z nach der Variablen s ergiebt sich

$$\bar{P}^2 + \bar{Q}^2 + \bar{R}^2 = \left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds}\right)^2;$$

die Bedingungsgleichung (2.) verwandelt sich also in die folgende:

$$\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds}\right)^2 = 1. \tag{8.}$$

Ferner ist

$$X = \left(\bar{R}\frac{dy'}{ds} - \bar{Q}\frac{dz'}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^5 - (\bar{Q}z' - \bar{R}y')\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\cdot\frac{d^2s}{dt^2},$$

und da für die erste der auf der rechten Seite vorkommenden Determinanten die Gleichung

$$\bar{R}\frac{dy'}{ds} - \bar{Q}\frac{dz'}{ds} = x'\left(\left(\frac{dy'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds}\right)^2\right) - \frac{dx'}{ds}\left(y'\frac{dy'}{ds} + z'\frac{dz'}{ds}\right)$$

gilt, so ergiebt sich bei Berücksichtigung der Gleichungen (6.), (7.), (8.) die Formel

$$X = x'\left(\frac{ds}{dt}\right)^5 - \frac{dx'}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \cdot \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Führt man nun an Stelle der beliebigen Function ε eine andere λ mittels der Gleichung

$$\lambda = \varepsilon\left(\frac{ds}{dt}\right)^5$$

ein, so wird

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon X_1) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\lambda\frac{dx'}{ds}}{\frac{ds}{dt}}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{dx'}{ds}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} - \varepsilon\frac{dx'}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\frac{d^2s}{dt^2},$$

also

$$-\varepsilon X + \frac{d}{dt}(\varepsilon X_1) = -\lambda x' + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx'}{ds}\right).$$

Setzt man diesen und die entsprechenden Ausdrücke in die Formeln für X_2, Y_2, Z_2 ein, so folgt

$$X_2 = (1+2\lambda)x' + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx'}{ds}\right), \tag{9.}$$

$$Y_2 = (1+2\lambda)y' + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy'}{ds}\right), \tag{10.}$$

$$Z_2 = (1+2\lambda)z' + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz'}{ds}\right). \tag{11.}$$

Dies sind die gesuchten Umformungen der in der Gleichung (5.) auftretenden Functionen X_2, Y_2, Z_2.

Aus der Gleichung (5.) ergiebt sich nun, wenn man den Bedingungen der Aufgabe gemäss annimmt, dass die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ sowohl für $t = t_0$ als für $t = t_1$ verschwinden, durch Ausführung einer partiellen Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} -\left(\frac{dX_2}{dt}\delta x + \frac{dY_2}{dt}\delta y + \frac{dZ_2}{dt}\delta z\right)dt = 0.$$

Aus dieser Formel leitet man in bekannter Weise die Folgerung ab, dass wenn die erste Variation des Integrales S verschwinden soll, wie auch immer die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ den angegebenen Bedingungen gemäss gewählt werden mögen, sich stets vier Grössen x, y, z, λ so als Functionen der

Variablen t bestimmen lassen müssen, dass die Gleichungen

$$\frac{dX_2}{dt} = 0, \quad \frac{dY_2}{dt} = 0, \quad \frac{dZ_2}{dt} = 0$$

und die Gleichung (3a.) gleichzeitig erfüllt sind. Nimmt man wieder die Grösse s als unabhängige Variable, so ergeben sich die Gleichungen

$$(12.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1+2\lambda)x' + \dfrac{d}{ds}\left(\lambda \dfrac{dx'}{ds}\right) = a \\ (1+2\lambda)y' + \dfrac{d}{ds}\left(\lambda \dfrac{dy'}{ds}\right) = b \\ (1+2\lambda)z' + \dfrac{d}{ds}\left(\lambda \dfrac{dz'}{ds}\right) = c, \end{array} \right.$$

in denen a, b, c beliebig anzunehmende Constanten bedeuten; die Gleichung (3a.) wird durch die beiden folgenden

$$(13.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ \left(\dfrac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy'}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dz'}{ds}\right)^2 = 1 \end{array} \right.$$

ersetzt.

Dabei ist nun aber noch eine wesentliche Bemerkung zu machen. Wenn nämlich die fünf Differentialgleichungen (12.), (13.) zur Bestimmung der vier Functionen x, y, z, λ benutzt werden sollen, so ist vor Allem zu zeigen, dass sie mit einander nicht im Widerspruch stehen. Und dies kann man in der That nachweisen. Die Gleichungen (12.) sind nämlich identisch mit den Gleichungen

$$\frac{dX_2}{ds} = 0, \quad \frac{dY_2}{ds} = 0, \quad \frac{dZ_2}{ds} = 0,$$

während aus den Gleichungen (13.) sich

$$x'\frac{dx'}{ds} + y'\frac{dy'}{ds} + z'\frac{dz'}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx'}{ds}\frac{d^2x'}{ds^2} + \frac{dy'}{ds}\frac{d^2y'}{ds^2} + \frac{dz'}{ds}\frac{d^2z'}{ds^2} = 0$$

ergiebt, woraus man die Gleichungen

$$x'\frac{d^2x'}{ds^2}+y'\frac{d^2y'}{ds^2}+z'\frac{d^2z'}{ds^2}=-1,$$
$$x'\frac{d^3x'}{ds^3}+y'\frac{d^3y'}{ds^3}+z'\frac{d^3z'}{ds^3}=0$$

herleitet. Nun ist aber vermöge der Formeln (9.), (10.), (11.)

$$\frac{dX_2}{ds}=2\frac{d\lambda}{ds}\cdot x'+\left(1+2\lambda+\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)\cdot\frac{dx'}{ds}+2\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{d^2x'}{ds^2}+\lambda\cdot\frac{d^3x'}{ds^3},$$
$$\frac{dY_2}{ds}=2\frac{d\lambda}{ds}\cdot y'+\left(1+2\lambda+\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)\cdot\frac{dy'}{ds}+2\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{d^2y'}{ds^2}+\lambda\cdot\frac{d^3y'}{ds^3},$$
$$\frac{dZ_2}{ds}=2\frac{d\lambda}{ds}\cdot z'+\left(1+2\lambda+\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)\cdot\frac{dz'}{ds}+2\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{d^2z'}{ds^2}+\lambda\cdot\frac{d^3z'}{ds^3}.$$

Demnach ergiebt sich

$$x'\frac{dX_2}{ds}+y'\frac{dY_2}{ds}+z'\frac{dZ_2}{ds}=0,$$

woraus sofort folgt, dass eine der drei Gleichungen (12.) eine Folge der beiden anderen und der Gleichungen (13.) ist. Die fünf aufgestellten Gleichungen sind also in jedem Falle mit einander vereinbar.

2.

Nachdem dies vorausgeschickt, ist nunmehr dargethan, dass die Bestimmung der allgemeinsten Curve, welche der in Rede stehenden Aufgabe genügt, abhängt von der Ermittelung von vier Functionen x, y, z, λ des Argumentes s, welche den Differentialgleichungen

(1.)
$$\begin{cases}(1+2\lambda)x'+\dfrac{d}{ds}\left(\lambda\dfrac{dx'}{ds}\right)=a\\ (1+2\lambda)y'+\dfrac{d}{ds}\left(\lambda\dfrac{dy'}{ds}\right)=b\\ (1+2\lambda)z'+\dfrac{d}{ds}\left(\lambda\dfrac{dz'}{ds}\right)=c,\end{cases}$$

(2.)
$$\begin{cases}x'^2+y'^2+z'^2=1\\ \left(\dfrac{dx'}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy'}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dz'}{ds}\right)^2=1\end{cases}$$

genügen, in denen x', y', z' die Ableitungen der Functionen x, y, z, und a, b, c drei willkürliche Constanten bedeuten; die sämmtlichen in diesen Gleichungen auftretenden Grössen sind reell.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie es möglich ist, die Integration des obigen Systems von fünf simultanen Differentialgleichungen auf die Lösung einer einzigen der ersten Ordnung zurückzuführen, nach deren Integration die Bestimmung der Grössen x, y, z nur noch die Ausführung einer Quadratur erfordert.

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (1.) leitet man die folgende her:

$$bz'-cy' = z'\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy'}{ds}\right)-y'\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz'}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\lambda\left(z'\frac{dy'}{ds}-y'\frac{dz'}{ds}\right)\right);$$

aus dieser und aus den beiden entsprechenden Gleichungen ergiebt sich

$$(3.)\qquad \begin{cases} \lambda\left(z'\dfrac{dy'}{ds}-y'\dfrac{dz'}{ds}\right) = bz-cy+a' \\ \lambda\left(x'\dfrac{dz'}{ds}-z'\dfrac{dx'}{ds}\right) = cx-az+b' \\ \lambda\left(y'\dfrac{dx'}{ds}-x'\dfrac{dy'}{ds}\right) = ay-bx+c', \end{cases}$$

wo a', b', c' ebenfalls drei willkürliche Constanten bedeuten.

Wenn jede der drei Constanten a, b, c gleich Null ist, so wird die durch die Gleichungen (1.) und (2.) definirte Curve ein Kreis. Sieht man von diesem speciellen Falle ab, nimmt man also an, dass mindestens eine der Constanten a, b, c einen von Null verschiedenen Werth besitze, so können die Gleichungen (1.) bis (3.) durch Einführung eines passenden Systems der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes beträchtlich vereinfacht werden. Es seien nämlich jetzt unter X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Bezug auf ein Axensystem verstanden, das dem ursprünglichen congruent ist und mit ihm den Nullpunkt gemein hat. Dann gelten die Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} X = \alpha x+\beta y+\gamma z \\ Y = \alpha' x+\beta' y+\gamma' z \\ Z = \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z, \end{cases}$$

$$(4a.)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{array}\right.$$

wo α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ Constanten sind, zwischen welchen die bekannten Relationen bestehen. Aus diesen folgt, dass die Gleichungen (1.) und (2.) Gültigkeit behalten, wenn man in ihnen die Grössen

$$x, \qquad y, \qquad z$$

durch

$$X, \qquad Y, \qquad Z,$$

die Constanten

$$a, \qquad b, \qquad c$$

durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma, \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma', \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''$$

und die Constanten

$$a', \qquad b', \qquad c'$$

durch

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma', \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma''$$

ersetzt. Das neue Axensystem werde nun so angenommen, dass

$$\begin{aligned} a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= 0, \\ a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= 0 \end{aligned}$$

wird; zu dem Ende setze man

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{l} l = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \alpha = al, \quad \beta = bl, \quad \gamma = cl, \end{array}\right.$$

und lege der Quadratwurzel ihren positiven Werth bei; dann ergeben sich die obigen Gleichungen aus den bekannten Relationen

$$(6.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \end{array}\right.$$

denen zufolge die Grössen α', β', γ' anzunehmen sind, und

$$(7.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha', \end{array}\right.$$

durch welche die Grössen α'', β'', γ'' bestimmt werden. Setzt man noch

$$\frac{dX}{ds} = \xi, \quad \frac{dY}{ds} = \eta, \quad \frac{dZ}{ds} = \zeta,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (1.) und (2.) in die folgenden:

$$(8.) \qquad \begin{cases} l(1+2\lambda)\xi + \dfrac{d}{ds}\left(l\lambda \dfrac{d\xi}{ds}\right) = 1 \\ l(1+2\lambda)\eta + \dfrac{d}{ds}\left(l\lambda \dfrac{d\eta}{ds}\right) = 0 \\ l(1+2\lambda)\zeta + \dfrac{d}{ds}\left(l\lambda \dfrac{d\zeta}{ds}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(9.) \qquad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\ \left(\dfrac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

während an die Stelle der Gleichungen (3.) die folgenden treten:

$$(10.) \qquad \begin{cases} l\lambda\left(\eta \dfrac{d\zeta}{ds} - \zeta \dfrac{d\eta}{ds}\right) = h \\ l\lambda\left(\zeta \dfrac{d\xi}{ds} - \xi \dfrac{d\zeta}{ds}\right) = Z + h' \\ l\lambda\left(\xi \dfrac{d\eta}{ds} - \eta \dfrac{d\xi}{ds}\right) = -Y + h'', \end{cases}$$

in welchen die Constanten h, h', h'' die Werthe

$$(11.) \qquad \begin{cases} h = -l(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = -\dfrac{aa' + bb' + cc'}{a^2 + b^2 + c^2} \\ h' = -l(a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') \\ h'' = -l(a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'') \end{cases}$$

besitzen. Aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich

$$\xi \frac{d\xi}{ds} + \eta \frac{d\eta}{ds} + \zeta \frac{d\zeta}{ds} = 0,$$

$$\xi \frac{d^2\xi}{ds^2} + \eta \frac{d^2\eta}{ds^2} + \zeta \frac{d^2\zeta}{ds^2} = -1.$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (8.) der Reihe nach mit ξ, η, ζ und

vereinigt sie sodann durch Addition, so erhält man

$$l(1+2\lambda)-l\lambda = \xi$$

oder

$$l\lambda = \xi - l. \tag{12.}$$

Aus den Formeln (10.) erhält man dann ferner

$$\begin{aligned}(Y-h'')+i(Z+h') &= (\xi-l)\left[\frac{d\xi}{ds}(\eta+i\zeta)-\xi\frac{d(\eta+i\zeta)}{ds}\right]\\ &= (\xi-l)\left[\frac{d\xi}{ds}-\xi\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds}\right](\eta+i\zeta).\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds} &= \frac{\eta\frac{d\eta}{ds}+\zeta\frac{d\zeta}{ds}}{\eta^2+\zeta^2}+i\frac{\eta\frac{d\zeta}{ds}-\zeta\frac{d\eta}{ds}}{\eta^2+\zeta^2}\\ &= -\frac{\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}+i\frac{h}{(1-\xi^2)(\xi-l)};\end{aligned}$$

also wird

$$(Y-h'')+i(Z+h') = \left\{\frac{\xi-l}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}-i\frac{h\xi}{1-\xi^2}\right\}(\eta+i\zeta). \tag{13.}$$

Daraus folgt

$$(Y-h'')^2+(Z+h')^2 = \frac{(\xi-l)^2}{1-\xi^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\frac{h^2\xi^2}{1-\xi^2}.$$

Andererseits ergiebt sich aber aus den Gleichungen (10.) unter Berücksichtigung der Formel (12.) und der Gleichung

$$\left(\eta\frac{d\zeta}{ds}-\zeta\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\zeta\frac{d\xi}{ds}-\xi\frac{d\zeta}{ds}\right)^2+\left(\xi\frac{d\eta}{ds}-\eta\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = 1,$$

dass auch

$$(Y-h'')^2+(Z+h')^2 = (\xi-l)^2-h^2$$

ist. Setzt man die beiden erhaltenen Werthe für den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung einander gleich, so entsteht die Gleichung

$$(\xi-l)^2\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = (1-\xi^2)(\xi-l)^2-h^2. \tag{14.}$$

Sie ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der Function ξ des Arguments s; die Grössen h und l sind dabei willkürlich

anzunehmende Constanten. Diese Differentialgleichung hat die singuläre Lösung

$$\xi = \xi_0,$$

wo ξ_0 einer der speciellen Werthe von ξ ist, für welche die Gleichung

$$(1-\xi^2)(\xi-l)^2-h^2 = 0$$

besteht. In der That ergiebt sich eine Lösung der Differentialgleichungen (1.) und (2.), bei welcher ξ constant ist. Soll das Letztere der Fall sein, so muss in Folge der Gleichung (11.) auch die Function λ einen constanten Werth haben. Die erste der Gleichungen (8.) giebt also

$$l(1+2\lambda)\xi_0 = 1,$$

und aus den beiden anderen findet man, wenn man

$$m = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}}$$

setzt und zugleich beachtet, dass

$$\eta^2+\zeta^2 = 1-\xi_0^2$$

eine von der Variablen s unabhängige Grösse ist,

$$\begin{aligned} \eta &= A\cos(ms)+B\sin(ms), \\ \zeta &= -B\cos(ms)+A\sin(ms), \end{aligned}$$

wo A, B reelle Constanten bedeuten. Damit die Gleichungen (9.) bestehen, müssen die Constanten den Bedingungen

$$\begin{aligned} A^2+B^2+\xi_0^2 &= 1, \\ m^2(A^2+B^2) &= 1 \end{aligned}$$

unterworfen sein, aus denen sich

$$\xi_0^2+\frac{1}{m^2} = 1$$

ergiebt. Es ist nun aber vermöge der Gleichung (12.)

$$2\lambda+1 = \frac{2\xi_0-l}{l},$$

also in Folge der obigen Gleichung $l(2\lambda+1)\xi_0 = 1$ auch

$$\xi_0(2\xi_0 - l) = 1.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Constanten ξ_0; sie hat stets zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, von denen eine dem absoluten Betrage nach stets kleiner als 1 ist. Für einen solchen Werth von ξ_0 wird dann, wie die drittletzte Gleichung zeigt, auch m reell.

Es werden also die Gleichungen (8.) und (9.) befriedigt, wenn man, unter l eine beliebige positive und unter ξ_0 eine solche Constante verstehend, deren absoluter Werth kleiner als 1 ist,

$$\xi = \xi_0, \quad \lambda = \frac{\xi_0 - l}{l}$$

und für η, ζ die angegebenen Ausdrücke setzt, wobei jedoch die im Übrigen willkürlichen Constanten A, B der einen Bedingung

$$A^2 + B^2 = 1 - \xi_0^2$$

gemäss zu wählen sind. Die Grösse h hängt ebenso wie λ von ξ_0 und l ab, und zwar in folgender Weise. Aus den Werthen von η und ζ ergiebt sich

$$\eta\frac{d\zeta}{ds} - \zeta\frac{d\eta}{ds} = m(A^2 + B^2) = \frac{1}{m} = \sqrt{1-\xi_0^2},$$

also vermöge der ersten der Gleichungen (10.)

$$\frac{h}{l\lambda} = \frac{h}{\xi_0 - l} = \sqrt{1-\xi_0^2},$$

so dass zwar ξ_0 in der That eine Wurzel der Gleichung

$$(1-\xi^2)(\xi-l)^2 - h^2 = 0$$

ist; man sieht aber, dass nur dann eine Wurzel dieser Gleichung zu der besprochenen Lösung der Differentialgleichungen (8.) und (9.) führt, wenn die Grösse h so gewählt wird, dass zwischen ihr und der willkürlich genommenen l eine Relation von der Art besteht, dass jene Wurzel zugleich die Gleichung

$$\xi(2\xi - l) = 1$$

befriedigt und zwischen den Grenzen $+1$ und -1 gelegen ist. Ist diese Bedingung erfüllt, und bestimmt man ξ, η, ζ wie angegeben worden, so er-

hält man weiter

$$X = \xi_0 s + X_0,$$

wo X_0 eine Constante bezeichnet, und aus der Gleichung (13.)

$$Y = \frac{h\xi_0}{1-\xi_0^2}\zeta + h'' = \frac{1}{m}(A\sin(ms) - B\cos(ms)) + h'',$$

$$Z = -\frac{h\xi_0}{1-\xi_0^2}\eta - h' = -\frac{1}{m}(A\cos(ms) + B\sin(ms)) - h';$$

woraus sich dann schliesslich mittels der Formeln (4a.) die Ausdrücke von x, y, z ergeben. Es ist bei der Herleitung dieser Ausdrücke angenommen worden, dass ξ_0^2 nicht gleich 1 sei; dies kann aber nicht stattfinden, weil dann, der Gleichung

$$\xi_0(\xi_0 - l) = 1 - \xi_0^2$$

gemäss, die Grösse $(\xi_0 - l)$, d. h. λl gleich Null wäre, aus den Gleichungen (8.) also folgen würde, dass die Functionen ξ, η, ζ alle drei constant wären, was der zweiten der Gleichungen (9.) widerspricht.

Den besprochenen singulären Fall bei Seite lassend, nehme man jetzt an, dass die Function ξ sich nicht auf eine Constante reducire. Dann kann es eintreten, dass

$$h = 0$$

ist. In diesem Falle hat man nach der Differentialgleichung (14.)

$$(\xi - l)^2\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = (1-\xi^2)(\xi - l)^2,$$

und es muss also, da die Grösse $(\xi - l)$ nicht beständig gleich Null ist, die Function ξ der Gleichung

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = 1 - \xi^2$$

genügen, also

$$\xi = \cos(s - s_0)$$

sein, wo s_0 eine Constante bedeutet.

Aus der ersten der Gleichungen (10.) folgt ferner

$$\eta\frac{d\zeta}{ds} - \zeta\frac{d\eta}{ds} = 0,$$

und es ist vermöge der ersten der Gleichungen (9.)

$$\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds} = \frac{\eta\frac{d\eta}{ds}+\zeta\frac{d\zeta}{ds}}{\eta^2+\zeta^2} = \frac{-\xi\frac{d\xi}{ds}}{1-\xi^2} = \frac{\cos(s-s_0)}{\sin(s-s_0)}.$$

Daraus folgt

$$\eta = A\sin(s-s_0), \quad \zeta = B\sin(s-s_0),$$

wo A, B reelle Constanten bedeuten, unter denen der ersten Gleichung (9.) wegen die Relation

$$A^2+B^2 = 1$$

bestehen muss; dann ist aber auch die zweite Gleichung (9.) erfüllt. Diese Ausdrücke von ξ, η, ζ genügen nun wirklich den Gleichungen (8.), wie man sich durch Einsetzen überzeugt, wenn man die Grösse λ der Gleichung

$$\lambda l = \xi - l$$

gemäss bestimmt. Aus ihnen erhält man dann

$$\begin{aligned} X &= \sin(s-s_0)+X_0, \\ Y &= -A\cos(s-s_0)+Y_0, \\ Z &= -B\cos(s-s_0)+Z_0, \end{aligned}$$

wo X_0, Y_0, Z_0 Constanten bezeichnen. Die Curve ist also auch in diesem besonderen Falle ein Bogen eines Kreises.

Im allgemeinen Fall, wo also weder die Constante h den Werth Null, noch die Function ξ einen constanten Werth hat, gelten zur Bestimmung der Grössen ξ, η, ζ die Gleichungen

$$(14.) \qquad (\xi-l)^2\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = (1-\xi^2)(\xi-l)^2-h^2,$$

$$(15.) \qquad \frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds} = -\frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{d\xi}{ds}+i\frac{h}{(1-\xi^2)(\xi-l)}.$$

Es sei s_0 irgend ein bestimmter Werth des Arguments s, für welchen $\frac{d\xi}{ds}$ nicht verschwindet, und ξ_0 der zugehörige Werth der Function ξ, und zwar von der Art, dass die Grösse $((1-\xi_0^2)(\xi_0-l)^2-h^2)$ einen positiven Werth hat, und demnach ξ_0 zwischen -1 und $+1$ liegt. Dann giebt es zwei bestimmte Werthe ξ_1, ξ_2, von denen der erste zwischen -1 und ξ_0, der andere zwischen ξ_0 und

$+1$ gelegen ist, von der Beschaffenheit, dass für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ die Function $((1-\xi^2)(\xi-l)^2-h^2)$ gleich Null wird, für jeden zwischen ξ_1 und ξ_2 enthaltenen Werth von ξ aber positiv ist. Es ist also

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = (\xi-\xi_1)(\xi_2-\xi)F(\xi),$$

wo $F(\xi)$ eine rationale Function des Arguments ξ ist, welche für $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$ und für jeden zwischen ξ_1 und ξ_2 liegenden Werth von ξ positiv ist. Wie in der Abhandlung »Über eine Gattung reell periodischer Functionen«*) gezeigt wurde, ist demnach ξ eine reguläre und reell periodische Function des unbeschränkt veränderlichen Arguments s, und zwar hat man

$$\xi = \varphi(s+g),$$

wo $\varphi(s)$ eine noch von den Constanten l, h abhängende Function bezeichnet, während g die Integrationsconstante ist, die so bestimmt werden kann, dass für einen beliebigen bestimmten Werth von s die Grösse ξ einen zwischen ξ_0 und ξ_1 willkürlich angenommenen Werth, und zugleich $\frac{d\xi}{ds}$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält. Dabei bleibt ξ beständig in dem Intervalle $(\xi_1 \ldots \xi_2)$ und erreicht dessen Grenzen für unendlich viele Werthe des Arguments s.

Aus der Gleichung (14.) ist nun ersichtlich, dass ebenso wie die Grösse $(1-\xi^2)$ auch die Grösse $(\xi-l)$ für keinen Werth von s verschwindet; es ist also der Ausdruck

$$\frac{1}{(\xi-l)(1-\xi^2)}$$

ebenfalls eine reguläre Function des Arguments s. Da nun der Relation

$$\eta^2+\zeta^2 = 1-\xi^2$$

wegen

$$\eta+i\zeta = \sqrt{1-\xi^2}.e^{\psi i}$$

gesetzt werden kann, wo ψ eine reelle Function der reellen Grösse s bezeichnet, so ergiebt sich zu deren Bestimmung aus der Gleichung (15.) die folgende:

$$\text{(16.)} \qquad \frac{d\psi}{ds} = \frac{h}{(1-\xi^2)(\xi-l)}.$$

*) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 22. Februar 1866. [Bd. II, S. 1 dieser Ausgabe.]

Bezeichnet man nun den mittleren Werth, welchen die Function auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung besitzt, mit μ, so hat die Function ψ die Form

$$\psi = \psi_0 + \mu(s+g) + \Psi(s+g), \tag{17.}$$

wo ψ_0 eine reelle Constante, $\Psi(s)$ eine reelle reguläre Function von s ist, deren mittlerer Werth gleich Null ist, und welche dieselbe reelle Periode besitzt wie die Function $\varphi(s)$. Demnach ergiebt sich

$$\eta + i\zeta = e^{(\mu(s+g)+\psi_0)i}.(\Phi_1(s+g) + i\Phi_2(s+g)), \tag{18.}$$

eine Gleichung für die Grössen η, ζ, in welcher $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ ebenfalls reelle reguläre Functionen des Arguments s bedeuten.

Damit ist die Existenz von drei reellen Functionen ξ, η, ζ des Arguments s nachgewiesen, welche den Gleichungen (14.), (15.) gleichzeitig genügen, und in welchen die Integrationsconstanten so bestimmt sind, dass die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

stattfindet. Es ist jedoch nunmehr noch zu zeigen, dass zwischen den so bestimmten Functionen ξ, η, ζ und der durch die Formel

$$l\lambda = \xi - l$$

gegebenen λ wirklich die Gleichungen (8.) und (9.) bestehen, wobei zu beachten ist, dass sich diese Bestimmung der Function λ als nothwendig erweist, wenn die genannten Gleichungen mit einander vereinbar sein sollen. Aus den Gleichungen (8.) und (9.) ergeben sich dann durch die Substitution

$$l = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\frac{dx}{ds} = \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta,$$

$$\frac{dy}{ds} = \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta,$$

$$\frac{dz}{ds} = \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta$$

die Gleichungen (1.) und (2.).

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = 1-\xi^2-\frac{h^2}{(\xi-l)^2}$$

folgt

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\xi+\frac{h^2}{(\xi-l)^3},$$

daher

$$(\xi-l)\frac{d^2\xi}{ds^2}+\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = 1-(2\xi-l)\xi$$

oder

$$\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d\xi}{ds}\right)+(2\xi-l)\xi = 1;$$

dies ist die erste der Gleichungen (8.), wenn man, wie angegeben, $l\lambda = \xi-l$ einsetzt.

Es ist ferner nach Gleichung (15.)

$$\begin{aligned}(\xi-l)\frac{d(\eta+i\zeta)}{ds} &= \left(-\frac{\xi(\xi-l)}{1-\xi^2}\frac{d\xi}{ds}+i\frac{h}{1-\xi^2}\right)(\eta+i\zeta)\\ &= f(s)(\eta+i\zeta),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d(\eta+i\zeta)}{ds}\right) = \left(f'(s)+\frac{f^2(s)}{\xi-l}\right)\cdot(\eta+i\zeta).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}f'(s) &= -\frac{\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d\xi}{ds}\right)-(\xi-l)\frac{1+\xi^2}{(1-\xi^2)^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+i\frac{2h\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}\\ &= -\frac{\xi[1-(2\xi-l)\xi]}{1-\xi^2}-(\xi-l)\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}+\frac{h^2(1+\xi^2)}{(1-\xi^2)^2(\xi-l)}+i\frac{2h\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}\\ &= -(2\xi-l)-(\xi-l)\frac{\xi^2}{1-\xi^2}+\frac{h^2(1+\xi^2)}{(1-\xi^2)^2(\xi-l)}+i\frac{2h\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{d\xi}{ds},\\ \frac{f^2(s)}{\xi-l} &= \frac{\xi^2(\xi-l)}{1-\xi^2}-\frac{h^2\xi^2}{(1-\xi^2)^2(\xi-l)}-\frac{h^2}{(1-\xi^2)^2(\xi-l)}-i\frac{2h\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{d\xi}{ds};\end{aligned}$$

daraus folgt

$$f'(s)+\frac{f^2(s)}{\xi-l} = -(2\xi-l).$$

Es ergiebt sich demnach

$$\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d(\eta+i\zeta)}{ds}\right)+(2\xi-l)(\eta+i\zeta) = 0$$

oder durch Trennung des Reellen und Imaginären

$$\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d\eta}{ds}\right)+(2\xi-l)\eta = 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left((\xi-l)\frac{d\zeta}{ds}\right)+(2\xi-l)\zeta = 0.$$

Es bestehen also die Gleichungen (8.), wenn man für ξ, η, ζ irgend drei den Gleichungen (14.) und (15.) genügende Functionen des Arguments s, und für λ den durch die Formel $l\lambda = \xi - l$ gegebenen Ausdruck setzt.

Aus der Gleichung (15.) ergiebt sich aber nun weiter

$$\frac{d}{ds}\log(\eta^2+\zeta^2) = -\frac{2\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds} = \frac{d}{ds}\log(1-\xi^2);$$

daraus folgt

$$\eta^2+\zeta^2 = C(1-\xi^2),$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet. Man kann also durch eine passende Wahl der in den Functionen η, ζ auftretenden Integrationsconstanten, z. B. dadurch, dass man der oben mit ψ_0 bezeichneten nur reelle Werthe beilegt, stets bewirken, dass die Gleichung

$$\eta^2+\zeta^2 = 1-\xi^2$$

besteht. Endlich folgt noch aus der Gleichung

$$\frac{d\eta}{ds}+i\frac{d\zeta}{ds} = \left(-\frac{\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}+i\frac{h}{(1-\xi^2)(\xi-l)}\right)\cdot(\eta+i\zeta),$$

dass

$$\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\frac{h^2}{(1-\xi^2)^2(\xi-l)^2}\right)\cdot(\eta^2+\zeta^2)$$
$$= -\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\frac{1}{1-\xi^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\frac{h^2}{(1-\xi^2)(\xi-l)^2}$$
$$= -\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+1$$

oder

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 1$$

ist. Man sieht also in der That, dass die auf die angegebene Weise bestimmten Ausdrücke für $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ die fünf Differentialgleichungen (8.) und (9.) befriedigen.

Da stets, wenn

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds} = -\frac{\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}+i\frac{\eta\dfrac{d\zeta}{ds}-\zeta\dfrac{d\eta}{ds}}{1-\xi^2}$$

besteht, so sieht man aus der Gleichung (15.), dass man in den Formeln (10.), welche eine Folge der Gleichungen (8.) sind, der Constanten h denselben Werth beilegen muss, wie in dem Ausdrucke von $\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2$, während man den beiden anderen Constanten h', h'' willkürliche reelle Werthe ertheilen kann. Man erhält dann mittels der Gleichung (13.) die Grössen Y, Z durch die Functionen ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{ds}$ ausgedrückt, während X durch die Gleichung

$$\frac{dX}{ds} = \xi$$

bestimmt wird. So ergeben sich definitiv die Coordinaten x, y, z durch die Formeln

$$\text{(19.)}\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z \\ y = \beta X+\beta' Y+\beta'' Z \\ z = \gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z. \end{array}\right.$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass man ohne Einschränkung der Allgemeinheit der in den Ausdrücken von η, ζ vorkommenden Constanten ψ_0 den Werth Null geben kann. Setzt man nämlich

$$\text{(20.)}\qquad \bar\eta+i\bar\zeta = \sqrt{1-\xi^2}\,e^{[\mu(s+g)+\Psi(s+g)]i},$$

$$\text{(21.)}\qquad \bar Y+i\bar Z = \left(\frac{\xi-l}{1-\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{ds}-i\frac{h\xi}{1-\xi^2}\right)(\bar\eta+i\bar\zeta),$$

so wird

$$(Y-h'')+i(Z+h') = e^{\psi_0 i}(\bar Y+i\bar Z),$$

also

$$\text{(22.)}\qquad \left\{\begin{array}{l} Y = \bar Y\cos\psi_0-\bar Z\sin\psi_0+h'' \\ Z = \bar Y\sin\psi_0+\bar Z\cos\psi_0-h', \end{array}\right.$$

und man erhält, wenn man, den mittleren Werth der Function $\varphi(s)$ mit μ'

bezeichnend, eine Function $\overline{\varphi}(s)$ so bestimmt, dass

$$\frac{d\overline{\varphi}(s)}{ds} = \varphi(s) - \mu' \tag{23.}$$

und der mittlere Werth von $\overline{\varphi}(s)$ gleich Null wird, und dann

$$\overline{X} = \mu'(s+g) + \overline{\varphi}(s+g) \tag{24.}$$

setzt, die Formeln

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha\overline{X} + \alpha_1\overline{Y} + \alpha_2\overline{Z} + x_0 \\ y &= \beta\overline{X} + \beta_1\overline{Y} + \beta_2\overline{Z} + y_0 \\ z &= \gamma\overline{X} + \gamma_1\overline{Y} + \gamma_2\overline{Z} + z_0, \end{aligned}\right. \tag{25.}$$

in welchen x_0, y_0, z_0 Constanten bedeuten, die beliebige Werthe erhalten können, α_1, β_1, γ_1 denselben Relationen wie vorher α', β', γ', nämlich den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

genügen, und α_2, β_2, γ_2 durch die Formeln

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1, \\ \beta_2 &= \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1, \\ \gamma_2 &= \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 \end{aligned}$$

gegeben sind.

Die Grössen $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ sind nun Functionen von $(s+g)$, welche keine anderen willkürlichen Constanten enthalten als h und l. Die Grössen α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 kann man rational durch drei andere, die dann beliebig anzunehmen sind, ausdrücken. Demnach enthalten die Ausdrücke von x, y, z ausser der mit der unabhängigen Veränderlichen s additiv verbundenen Constanten g noch acht willkürliche Constanten.

3.

Nach dem Vorhergehenden ist die zu lösende Aufgabe auf die folgende zurückgeführt:

Man bestimme zunächst eine Function ξ der unbeschränkt veränderlichen Grösse s, welche der Differentialgleichung

$$(\xi - l)^2\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = (1-\xi^2)(\xi-l)^2 - h^2$$

genügt; dabei bedeuten h, l reelle und positive Constanten, deren im Übrigen willkürliche Wahl an die Bedingung geknüpft ist, dass es reelle Werthe von ξ geben muss, für welche die Function

$$R(\xi) = (1-\xi^2)(\xi-l)^2-h^2$$

positiv ist. Setzt man ferner fest, es soll die Function ξ an der Stelle $(s=0)$ einen der Werthe annehmen, für welche $R(\xi)$ verschwindet, so ist sie nunmehr vollständig definirt und hat für jeden reellen Werth ihres Arguments einen ebenfalls reellen Werth, der zwischen -1 und $+1$ liegt.

Nach Ermittelung der Function ξ bestimme man zwei reelle Functionen η, ζ des Arguments s, für welche die Differentialgleichung

$$\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{ds} = -\frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{d\xi}{ds}+i\frac{h}{(1-\xi^2)(\xi-l)}$$

gilt, wobei zu beachten, dass die Grössen $(1-\xi), (1+\xi), (\xi-l)$ alle drei für keinen reellen Werth von s gleich Null werden. Die Constanten der Integration sind dabei so zu wählen, dass die Bedingung

$$\eta^2+\zeta^2 = 1-\xi^2$$

stattfindet. Alsdann setze man

$$X = \int \xi(s)\,ds,$$
$$Y+iZ = \left(\frac{\xi-l}{1-\xi^2}\frac{d\xi}{ds}-i\frac{h\xi}{1-\xi^2}\right)(\eta+i\zeta),$$

wo der Werth der Function X an der Stelle $(s=0)$ beliebig angenommen werden kann, so wird

$$\frac{dY}{ds} = \eta, \quad \frac{dZ}{ds} = \zeta.$$

Endlich bestimme man die Grössen x, y, z durch die Formeln

$$x = \alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z+x_0,$$
$$y = \beta X+\beta' Y+\beta'' Z+y_0,$$
$$z = \gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z+z_0,$$

in denen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$; x_0, y_0, z_0 reelle Constanten bedeuten, von welchen die neun ersten so gewählt werden müssen, dass

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = X^2+Y^2+Z^2$$

für unbestimmte Werthe der Grössen X, Y, Z wird — welche sich also rational durch drei von einander unabhängige Grössen ausdrücken lassen. Dann stellen die Grössen x, y, z, wie man auch die Constanten h, l; $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$; x_0, y_0, z_0 den angegebenen Bedingungen gemäss annehmen möge, stets die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer krummen Linie dar, welche der in Rede stehenden Aufgabe genügt, und für welche die Veränderliche s die Bogenlänge bedeutet.

Umgekehrt lassen sich von einer jeden Curve, welche der behandelten Aufgabe genügt, die rechtwinkligen Coordinaten eines ihrer Punkte in der Form der obigen Grössen x, y, z darstellen, wenn man von gewissen Grenzfällen absieht.

Nunmehr soll zur expliciten Darstellung der Grössen x, y, z übergegangen werden.

Man führe eine Grösse u ein mittels der Gleichung

$$u = \int_0 \frac{ds}{l-\xi},$$

so durchläuft, wenn s stetig wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, u ebenfalls beständig zunehmend die Strecke $(-\infty \cdots +\infty)$; man kann daher die Grösse ξ, und ebenso η, ζ; X, Y, Z; x, y, z als Functionen von u ausdrücken. Dann ergeben sich die Gleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = (1-\xi^2)(\xi-l)^2 - h^2 = \mathcal{R}(\xi),$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{d\log(\eta+i\zeta)}{du} = \frac{\xi}{\xi^2-1}\cdot\frac{d\xi}{du} + i\frac{h}{\xi^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi-1} + i\frac{h}{\xi-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi+1} - i\frac{h}{\xi+1}\right),$$

$$\text{(3.)} \qquad Y+iZ = \left(\frac{1}{\xi^2-1}\cdot\frac{d\xi}{du} + i\frac{h\xi}{\xi^2-1}\right)(\eta+i\zeta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi-1} + i\frac{h}{\xi-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi+1} - i\frac{h}{\xi+1}\right)(\eta+i\zeta),$$

$$\text{(4.)} \qquad \frac{dX}{du} = \xi(l-\xi),$$

$$\text{(5.)} \qquad \frac{ds}{du} = l-\xi.$$

Setzt man nun

$$R(\xi) = A\xi^4 + 4B\xi^3 + 6C\xi^2 + 4B'\xi + A',$$

so ist

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{2}l, \quad C = \frac{1-l^2}{6}, \quad B' = -\frac{1}{2}l, \quad A' = l^2 - k^2$$

und

$$R_1(\xi) = \frac{1}{4}R'(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - l)(1 + l\xi - 2\xi^2),$$

$$R_2(\xi) = -\frac{1}{24}R''(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - l)\xi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-l^2}{6}.$$

Daraus bildet man

$$(6.) \quad \begin{cases} D = R_2\left(-\frac{B}{A}\right) = -\frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2}l^2\right) \\ E = R_1\left(-\frac{B}{A}\right) = -\frac{1}{4}l \\ g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2 = \frac{1}{12}(1-l^2)^2 + k^2 \\ g_3 = 2D(8D^2 - g_2) - AE^2 = 2D(8D^2 - g_2) + \frac{1}{16}l^2. \end{cases}$$

Die so bestimmten Grössen g_2, g_3 sind die Invarianten der im Folgenden vorkommenden σ- und $\wp$-Functionen.

Wenn die Discriminante

$$G = g_2^3 - 27g_3^2$$

positiv ist, so hat die Gleichung

$$R(\xi) = 0$$

vier reelle Wurzeln; ist sie negativ, zwei reelle und zwei conjugirt complexe. In beiden Fällen hat man, um die Grösse ξ als Function von u auszudrücken, eine Constante v so zu bestimmen, dass

$$(7.) \qquad \wp v = 2D, \quad \wp' v = -2iE$$

wird. Versteht man unter

$\tilde{\omega}$ den kleinsten positiven Werth von u, für den $\wp'(u; g_2, \quad g_3) = 0$,

unter

$\tilde{\omega}'$ den kleinsten positiven Werth von u, für den $\wp'(u; g_2, -g_3) = 0$

wird, so ist in beiden Fällen v von der Form

$$v = 2i\varepsilon\tilde{\omega}' \qquad (\tfrac{1}{2} < \varepsilon < 1);$$

setzt man nun $u_0 = \frac{1}{2}v$, so dass also u_0 die Form

$$u_0 = i\varepsilon\tilde{\omega}'$$

hat, so wird in beiden Fällen durch die Gleichung

$$(8.) \qquad \xi = \frac{1}{2}l - i\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right)$$

eine der Differentialgleichung (1.) und den angegebenen Bedingungen genügende Function dargestellt, welche für reelle Werthe des Arguments u stets ebenfalls reelle Werthe annimmt.*)

Wenn die Gleichung $R(\xi) = 0$ die beiden reellen Wurzeln a_0, a_1 hat, von denen a_0 die grössere sein soll, so nimmt die Function ξ für $u = 0$ den Werth a_0, für $u = \tilde{\omega}$ den Werth a_1 an; für alle anderen reellen Werthe von u befindet sich ξ beständig im Intervalle $(a_0 \ldots a_1)$.

Wenn die Gleichung $R(\xi) = 0$ die vier reellen Wurzeln a_0, a_1, a_2, a_3 hat, von denen a_0 grösser als a_1, a_1 grösser als a_2 und a_2 grösser als a_3 sei, so liefert die Formel (8.) eine zweite Function ξ, welche für $u = 0$ den Werth a_3, für $u = \tilde{\omega}$ den Werth a_2 hat, im Übrigen aber von derselben Beschaffenheit wie die erste ist, wenn man

$$u_0 = \tfrac{1}{2}v - i\tilde{\omega}$$

annimmt. — Man kann demnach stets bewirken, dass die den reellen Werthen des Arguments entsprechenden Werthe der Function ξ beständig zwischen a_0 und a_1 oder beständig zwischen a_2 und a_3 liegen. Dabei ist zu beachten, dass a_0 und a_3 im Innern des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ liegen, sowie, dass die Grösse l keinem der genannten Intervalle angehört. Es soll dies weiter unten noch näher auseinandergesetzt werden.

Bezeichnet man die so bestimmte Function ξ mit $\varphi(u)$, so giebt es zwei

*) Man erhält die obige Gleichung (8.) leicht aus der allgemeinen, für die Umformung eines elliptischen Differentials geltenden, wenn man noch die Formeln (2.) des Art. 11 und (16.) des Art. 12 der »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen« von H. A. Schwarz, zweite Ausgabe (Berlin 1893), in Rücksicht zieht; auf diese Schrift beziehen sich auch die im Folgenden angegebenen Citate.

Werthe u_1, u_2 der Variablen u, für welche

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= 1, \quad \varphi'(u_1) = ih, \\ \varphi(u_2) &= -1, \quad \varphi'(u_2) = -ih \end{aligned}$$

ist, wobei die Gleichungen für die Grössen $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$ aus den anderen folgen, wenn man berücksichtigt, dass die Function $R(\xi)$ für $\xi = 1$ und für $\xi = -1$ den Werth $-h^2$ annimmt. Man kann auch den Grössen u_1, u_2 rein imaginäre Werthe geben.

Ist nämlich, die Discriminante $(g_2^3 - 27g_3^2)$ als negativ vorausgesetzt, der Werth a_0, den die Function $\varphi(u)$ für $u = 0$ annimmt, die grösste Wurzel der Gleichung $R(\xi) = 0$, so kann man setzen

$$u_1 = \int_{a_0}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \pm i \int_{a_0}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{-R(\xi)}},$$

$$u_2 = \int_{a_0}^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \int_{a_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \pm i \left\{ \int_{a_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{-R(\xi)}} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{-R(\xi)}} \right\};$$

dann ist $\varphi(u_1) = 1$, $\varphi(u_2) = -1$, während man das unbestimmt gebliebene Vorzeichen in den vorstehenden Formeln so festsetzen kann, dass auch die Gleichungen $\varphi'(u_1) = ih$, $\varphi'(u_2) = -ih$ bestehen, wobei zu beachten ist, dass $\varphi(u)$ eine grade Function von u ist. — Ebenso wird das Behauptete bewiesen, wenn in dem Falle, wo die Gleichung $R(\xi) = 0$ vier reelle Wurzeln hat, $\varphi(u)$ diejenige Function ist, deren Werth für $u = 0$ der kleinsten dieser Wurzeln gleich ist.

Nachdem dies festgestellt ist, betrachte man die Functionen $(1-\xi)$ und $(1+\xi)$; ihre gemeinsamen Unendlichkeitsstellen sind (u_0) und $(-u_0)$, während die Nullstellen für die Function $(1-\xi)$ die Stellen (u_1), $(-u_1)$, für die Function $(1+\xi)$ die Stellen (u_2), $(-u_2)$ sind. Man hat demnach

$$(10.) \qquad \begin{cases} 1-\xi = c_1 \cdot \dfrac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)} \\ 1+\xi = c_2 \cdot \dfrac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}. \end{cases}$$

Die noch zu bestimmenden multiplicativen Constanten c_1, c_2 haben jedenfalls, da die Functionen $(1-\xi)$ und $(1+\xi)$ für jeden reellen Werth von u positiv sind, beide reelle positive Werthe; sie werden dadurch ermittelt, dass man

dem Argumente u specielle Werthe (u_1, u_2, u_0) ertheilt, für welche die Function ξ (oder deren Ableitung) bekannte Werthe annimmt. Auf diese Weise erhält man

$$(11.)\qquad \begin{cases} c_1 = -i\dfrac{\sigma(2u_0)}{\sigma(u_1-u_0)\,\sigma(u_1+u_0)} \\ c_2 = +i\dfrac{\sigma(2u_0)}{\sigma(u_2-u_0)\,\sigma(u_2+u_0)}; \end{cases}$$

es ist demnach

$$(12.)\qquad \begin{cases} 1-\xi = -i\dfrac{\sigma(2u_0)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)}{\sigma(u_1-u_0)\,\sigma(u_1+u_0)\,\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)} \\ 1+\xi = +i\dfrac{\sigma(2u_0)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u_2-u_0)\,\sigma(u_2+u_0)\,\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$R''(\xi) = 2\frac{d^3\xi}{du^3} : \frac{d\xi}{du} = 2\frac{\wp''(u+u_0)-\wp''(u-u_0)}{\wp(u+u_0)-\wp(u-u_0)},$$

woraus sich mittels der Formel (15.) des Artikels 9

$$(13.)\qquad (l-\xi)\xi + \frac{1-l^2}{6} = \wp(u+u_0)+\wp(u-u_0)$$

ergiebt; daraus folgt nach der Gleichung (4.)

$$(14.)\qquad X = \frac{l^2-1}{6} - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0).$$

Weiter hat man zufolge der Gleichung (2.)

$$\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{du} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_2)}{\varphi(u)-\varphi(u_2)}.$$

Setzt man in diese Gleichung für die auf der rechten Seite auftretenden Zähler und Nenner die aus den Gleichungen (12.) berechneten Ausdrücke ein, und wendet auf das so erhaltene Resultat die Formeln des Artikels 11 und die Formel (1.) des Artikels 38 an, so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen die Gleichung

$$\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{du} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) + im,$$

in welcher

$$(15.) \qquad m = \frac{1}{2i}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_0)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u_2-u_0)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u_2+u_0)\right)$$

zu setzen ist, also eine reelle Grösse bedeutet. Daraus folgt

$$\eta+i\zeta = C\cdot\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{imu},$$

wo C die im Allgemeinen complexe Integrationsconstante ist, und weiter

$$\eta-i\zeta = C'\cdot\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{-imu},$$

wenn C' die mit C conjugirte Grösse bezeichnet. Durch Multiplication erhält man aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$1-\xi^2 = CC'\cdot\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma^2(u-u_0)\,\sigma^2(u+u_0)};$$

nach den Gleichungen (10.) muss also

$$CC' = c_1 c_2$$

sein; man kann demnach

$$C = \sqrt{c_1 c_2}\, e^{\mu i},$$
$$C' = \sqrt{c_1 c_2}\, e^{-\mu i}$$

setzen, wo μ eine reelle Constante bedeutet. Sie entspricht der im vorigen Abschnitt (vgl. Gleichung (18.)) mit ψ_0 bezeichneten, und kann daher, wie dort nachgewiesen, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Null genommen werden; man kann also

$$(16.) \qquad \begin{cases} \eta+i\zeta = \sqrt{c_1 c_2}\cdot\dfrac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{imu} \\ \eta-i\zeta = \sqrt{c_1 c_2}\cdot\dfrac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{-imu} \end{cases}$$

annehmen.

Endlich ist noch zur Bestimmung der Grössen Y, Z die Function

$$\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi^2-1}+i\frac{h\xi}{\xi^2-1} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)}-\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_2)}{\varphi(u)-\varphi(u_2)}$$

zu berechnen, welche mit $g(u)$ bezeichnet werden möge; man erhält auf dem nämlichen Wege, wie er vorher zur Berechnung der Function $\frac{d\log(\eta+i\zeta)}{du}$ angegeben wurde, den Ausdruck

$$g(u) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_2) + \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0) + \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_0) - \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(u_2-u_0) - \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma}(u_2+u_0).$$

Daraus erkennt man, dass die Function $g(u)$ eine elliptische Function zweiten Grades von u ist, für welche (u_1), (u_2) zwei nicht congruente Unendlichkeitsstellen sind. Ist nun $g(u)$ für specielle Werthe von u gleich Null, so ist auch

$$|g(u)|^2 = \frac{(\xi-l)^2-h^2}{1-\xi^2} = 0;$$

dies ist der Fall, wenn man $\xi = l \pm h$, d. h.

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = (1-\xi^2)h^2 - h^2 = -h^2(l\pm h)^2$$

oder

$$\frac{d\xi}{du} = \pm ih(l\pm h)$$

setzt. Es wird aber in der That $g(u)$ gleich Null, wenn

$$\xi = l \pm h,$$
$$\frac{d\xi}{du} = -ih(l\pm h)$$

gesetzt wird. Demnach lassen sich zwei Argumente u_3, u_4 so angeben, dass die Gleichungen

$$(17.) \qquad \begin{cases} \varphi(u_3) = l+h, & \varphi'(u_3) = -ih(l+h) \\ \varphi(u_4) = l-h, & \varphi'(u_4) = -ih(l-h) \end{cases}$$

erfüllt sind; die Stellen (u_3), (u_4) sind die Nullstellen der Function $g(u)$, und daher stets so bestimmbar, dass die Relation

$$u_1+u_2 = u_3+u_4$$

besteht. Die Function $g(u)$ lässt sich dann darstellen in der Form

$$g(u) = c\cdot\frac{\sigma(u-u_3)\,\sigma(u-u_4)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)},$$

wo c eine Constante bedeutet, welche dadurch ermittelt werden kann, dass

man die beiden Ausdrücke für die Ableitung $g'(u)$ einander gleich setzt und dem Argument einen speciellen Werth (u_1) beilegt. Auf diese Weise erhält man

$$c = \frac{\sigma(u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_3-u_2)}.$$

Für die Function $g(u)$ ergiebt sich also der Werth

$$\frac{\frac{d\xi}{du}}{\xi^2-1}+i\frac{h\xi}{\xi^2-1} = \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u-u_1-u_2+u_3)}{\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_3-u_2)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}.$$

Nunmehr folgt aus der Gleichung (3.) für Y, Z die Formel

$$(18.)\qquad Y+iZ = \sqrt{c_1 c_2}\cdot\frac{\sigma(u_2-u_1)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u-u_1-u_2+u_3)}{\sigma(u_3-u_1)\,\sigma(u_3-u_2)\,\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{imu},$$

also auch

$$(19.)\qquad Y-iZ = \sqrt{c_1 c_1}\cdot\frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u-u_3')\,\sigma(u+u_1+u_2+u_3')}{\sigma(u_3'+u_1)\,\sigma(u_3'+u_2)\,\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}\cdot e^{-imu},$$

wenn unter u_3' die mit u_3 conjugirte Grösse verstanden wird, so dass

$$\wp(u_3') = l+h, \quad \wp'(u_3') = ih(l+h)$$

ist.

So sind demnach jetzt die Grössen X, Y, Z; $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$ als eindeutige und reellwerthige Functionen einer unbeschränkt veränderlichen reellen Variablen u dargestellt; sie hängen ausserdem noch ab von den beiden willkürlichen Constanten h, l.

Daher sind auch die Grössen

$$(20.)\qquad \begin{cases} x = \alpha X+\alpha' Y+\alpha'' Z+x_0 \\ y = \beta X+\beta' Y+\beta'' Z+y_0 \\ z = \gamma X+\gamma' Y+\gamma'' Z+z_0 \end{cases}$$

und ihre Ableitungen $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ eindeutige Functionen des Arguments u, in welchen noch acht von einander unabhängige Constanten auftreten.

Die Grösse s erhält man mittels der Gleichungen (5.) und (8.) als Function von u ausgedrückt in der Form

$$(21.)\qquad s = \left(\frac{1}{2}l+i\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right)u - i\left\{\log\frac{\sigma(u+u_0)}{\sigma(u_0)}-\log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(-u_0)}\right\},$$

wo in dem Falle, dass der Punkt $(u = 0)$ der Curve von der Stelle $(s = 0)$ nicht verschieden ist, für diesen Punkt jedem der Logarithmen der Werth Null zu geben ist.

Den vorstehenden Untersuchungen mögen noch einige Bemerkungen über die Nullstellen der Function

$$R(\xi) = (1-\xi^2)(\xi-l)^2-k^2$$

beigefügt werden. — Zunächst werde angenommen, dass die positive Constante l nicht gleich 1 sei; unter dieser Voraussetzung besitzt die Function

$$\chi(\xi) = (1-\xi^2)(\xi-l)^2,$$

deren Ableitung

$$\chi'(\xi) = 2(\xi-l)(1+l\xi-2\xi^2)$$

ist, zwei Maxima und ein Minimum.

Wenn erstens $l<1$ ist, so treten die Maxima χ_1, χ_2 der Function $\chi(\xi)$ ein, wenn ξ die Werthe

$$\xi_1 = \frac{l-\sqrt{8+l^2}}{4} < 0,$$

$$\xi_2 = \frac{l+\sqrt{8+l^2}}{4} > 0$$

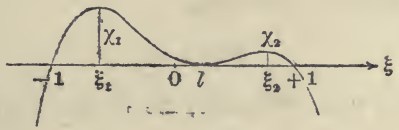
annimmt, wo dann

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{2}$$

und

$$\chi_1 > \chi_2 > 0$$

ist; das Minimum $(\chi = 0)$ liegt an der Stelle $(\xi = l)$, und man hat



$$-1 < \xi_1 < 0 < l < \xi_2 < +1.$$

In diesem Falle hat also die Gleichung

$$R(\xi) = 0,$$

wenn $h^2 \leqq \chi_2$ ist, vier reelle Wurzeln, die in den Intervallen

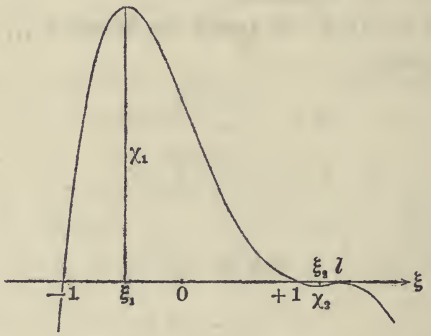
$$(-1 \ldots \xi_1),\ (\xi_1 \ldots l),\ (l \ldots \xi_2),\ (\xi_2 \cdots +1)$$

gelegen sind; sie hat, wenn $\chi_2 < h^2 \leqq \chi_1$ ist, zwei reelle Wurzeln, und diese liegen in den Intervallen

$$(-1 \ldots \xi_1),\ (\xi_1 \ldots l).$$

Wenn $h^2 = \chi_2$, so fallen von den vier reellen Wurzeln zwei an der Stelle (ξ_2) zusammen; wenn $h^2 = \chi_1$, so gilt dies von den beiden reellen Wurzeln und für die Stelle (ξ_1). Die Gleichung hat überhaupt keine reellen Wurzeln, wenn $h^2 > \chi_1$ ist.

Wenn zweitens $l > 1$ ist, so treten die Maxima $(\chi = \chi_1,\ \chi = 0)$ der Function $\chi(\xi)$ ein, wenn ξ die Werthe ξ_1 und l annimmt; das Minimum $(\chi = \chi_2)$ liegt an der Stelle (ξ_2), und man hat



$$-1 < \xi_1 < 0 < +1 < \xi_2 < l.$$

In diesem Falle hat also die Gleichung

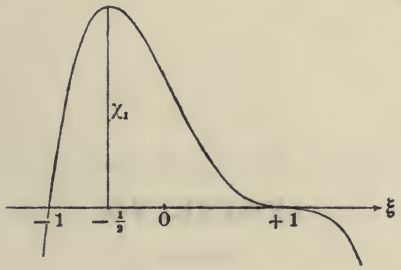
$$R(\xi) = 0,$$

wenn $h^2 \leqq \chi_1$ ist, zwei reelle Wurzeln, die in den Intervallen

$$(-1 \cdots \xi_1),\ (\xi_1 \cdots +1)$$

liegen; ist $h^2 = \chi_1$, so fallen sie beide im Punkte (ξ_1) zusammen. Die Gleichung hat keine reellen Wurzeln, wenn $h^2 > \chi_1$ ist.

Es werde nun vorausgesetzt, dass die Grösse l gleich 1 sei; dann nimmt auch die oben mit ξ_2 bezeichnete Grösse den Werth 1 an, und die Function $\chi(\xi)$ hat ein Maximum (χ_1) für $\xi = -\frac{1}{3}$, aber kein Minimum:



In diesem Falle hat also die Gleichung

$$R(\xi) = 0,$$

wenn $h^2 \leqq \chi_1$ ist, zwei reelle Wurzeln, die in den Intervallen

$$(-1 \cdots -\tfrac{1}{3}),\ (-\tfrac{1}{3} \cdots +1)$$

liegen, und die, wenn $h^2 = \chi_1$ ist, im Punkte $(-\frac{1}{3})$ zusammenfallen. Ist $h^2 > \chi_1$, so besitzt die Gleichung überhaupt keine reellen Wurzeln.

ANMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung ist aus Aufzeichnungen entstanden, welche Weierstrass im October 1884 im Anschluss an einen mit Herrn H. A. Schwarz geführten Briefwechsel von Wilhelmshöhe aus an diesen gesandt hat. Die Bearbeitung des Manuscripts rührt von den Herren R. Rothe und H. A. Schwarz her, welche auch die bis zum Jahre 1884 reichenden Literaturangaben hinzugefügt haben.

K.

FORTSETZUNG DER UNTERSUCHUNG ÜBER DIE MINIMALFLÄCHEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom December 1866.)

Die kleinste Fläche, welche von einer einfachen — d. h. durch keinen Punkt mehr als einmal gehenden — geschlossenen Linie begrenzt wird, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass ihre mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Überdies lässt sich zeigen, dass sie eine einfach zusammenhängende, monogene und in ihrem Innern keinen singulären Punkt enthaltende Fläche ist. Daher kann sie durch die in meiner frühern Mittheilung*) angegebenen Gleichungen dargestellt werden. Die Bestimmung der in diesen Gleichungen**) vorkommenden Functionen $G(u)$, $H(u)$ ist aber, bei vorgeschriebener Begrenzung der Fläche, im Allgemeinen mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft. Ich habe mich daher darauf beschränkt, den Fall, wo die Begrenzung aus geraden Strecken zusammengesetzt ist, genauer zu untersuchen, und erlaube mir, das verhältnissmässig einfache Resultat, zu welchem ich gekommen bin, der Akademie in wenigen Worten mitzutheilen, wenn ich auch auf die Herleitung desselben heute nicht eingehen kann.

Die a. a. O. mit (E) bezeichnete Figur, von der die zu bestimmende Fläche (M) ein conformes Abbild sein soll, sei ein um den Nullpunkt der Coordinaten (p, q) mit dem Radius 1 beschriebener Kreis. Dann entspricht jedem im Innern und in der Peripherie dieses Kreises liegenden Punkte $(u = p + qi)$ ein Punkt (x, y, z) von (M), und es gelten die folgenden Gleichungen, in denen x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des zu dem Mittelpunkt des Kreises gehörenden

*) [S. 39—52 dieses Bandes.]

**) [S. 42 dieses Bandes (Gl. 14).]

(und willkürlich anzunehmenden) Punktes von (M) bedeuten:

$$x = x_0 + \Re \int_0 (G^2(u) - H^2(u))\, du,$$

$$y = y_0 + \Re \int_0 i\,(G^2(u) + H^2(u))\, du,$$

$$z = z_0 + \Re \int_0 2G(u)\, H(u)\, du.$$

Die in diesen Formeln vorkommenden Functionen $G(u)$, $H(u)$ besitzen nun an allen Stellen im Innern und in der Peripherie des genannten Kreises, mit Ausnahme derer, die den Ecken des die Fläche (M) begrenzenden Polygons entsprechen, den Charakter ganzer Functionen, so dass sie auch durch Reihen von der a. a. O.*) angegebenen Gestalt dargestellt werden können. Ferner genügen sie beide einer und derselben linearen Differential-Gleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen von u sind.

Die in dieser Differential-Gleichung vorkommenden Constanten, sowie diejenigen, welche durch die Integration eingeführt werden, hängen ab von den Richtungen und den Längen der einzelnen Strecken, aus denen die Begrenzung von (M) besteht. Im Allgemeinen erfordert die Bestimmung dieser Constanten die Lösung transcendenter Gleichungen; es ist aber nicht schwierig, specielle Fälle aufzufinden, in denen man zu vollständig entwickelten Ausdrücken von $G(u)$, $H(u)$ durch bekannte Functionen gelangen kann.

Die Figur (E) kann übrigens auch eine der beiden Halbebenen sein, in welche die Ebene der (p, q) durch die p-Axe getheilt wird. Die Constanten der Differential-Gleichung sind dann sämmtlich reelle Grössen.

Eine ausführlichere Mittheilung behalte ich mir vor.

*) [S. 42 dieses Bandes (Gl. 16).]

ANALYTISCHE BESTIMMUNG EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER MINIMALFLÄCHENSTÜCKE, DEREN BEGRENZUNG AUS GERADLINIGEN, GANZ IM ENDLICHEN LIEGENDEN STRECKEN BESTEHT.

Im Folgenden sollen diejenigen Untersuchungen und Beweismethoden mitgetheilt werden, welche zu den bereits im Jahre 1866 in der kurzen Abhandlung: »Fortsetzung der Untersuchungen über die Minimalflächen«*) veröffentlichten Resultaten geführt haben. Die Unterscheidung derselben drei Fälle, welche im Nachstehenden mit I., II., III. bezeichnet werden, ist bereits in einer im Jahre 1868 verfassten, in den Sitzungsberichten der Akademie vom Jahre 1894, Seite 1237—1266 veröffentlichten Arbeit von H. A. Schwarz enthalten; die Art der Herleitung ist aber von der hier mitgetheilten in mehreren wesentlichen Punkten verschieden.

Die hauptsächlichsten Resultate der Abhandlung »Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist«**) werden im Folgenden vorausgesetzt.

Das Problem, um welches es sich handelt, ist das folgende:

> Es soll ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück (M) analytisch bestimmt werden, dessen vorgeschriebene Begrenzung (L) aus n geradlinigen, ganz im Endlichen liegenden Strecken besteht, welche eine einfache, geschlossene, nicht verknotete Linie bilden.

*) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 20. Dec. 1866. [S. 219—220 dieses Bandes.]

**) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 26. Juni 1866. [S. 39—52 dieses Bandes.]

Es werde zunächst das Verhalten des Flächenstücks (M) in der Nähe eines Eckpunktes A untersucht, welcher zwei aufeinander folgenden Strecken der Begrenzung (L) gemeinsam ist; hierbei soll vorausgesetzt werden, dass die Fläche in der Nähe des Eckpunktes A einfach ist, mit andern Worten, dass sie keine von der Ecke A ausgehende Doppelcurve besitzt.

Es seien $A'A$, AA'' die beiden an der Ecke (A) zusammentreffenden Strecken der Begrenzung (L); ihre Richtungen bilden mit den positiven Richtungen der drei Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus die Werthe α', β', γ'; α, β, γ haben mögen; ferner sei $\nu\pi$ die Bogenzahl des Winkels, welchen die Richtungen der beiden Strecken AA' und AA'' mit einander bilden, wobei festgesetzt werden soll, dass die positive Zahl ν nicht grösser als 1 ist. Setzt man dann

$$\cos(\nu\pi) = -\delta,$$

so bestehen die bekannten Relationen

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= \delta. \end{aligned}$$

Der seiner Lage nach als gegeben zu betrachtende Eckpunkt A habe die rechtwinkligen Coordinaten a, b, c, während unter x, y, z die eines unbestimmten Punktes des Minimalflächenstückes (M) verstanden werden sollen. Definirt man dann drei Grössen p, p', q durch die Formeln

$$\begin{aligned} p &= \alpha \,.\, (x-a) + \beta \,.\, (y-b) + \gamma \,.\, (z-c), \\ p' &= \alpha' \,.\, (x-a) + \beta' \,.\, (y-b) + \gamma' \,.\, (z-c), \\ q &= (\gamma\beta' - \beta\gamma')(x-a) + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')(y-b) + (\beta\alpha' - \alpha\beta')(z-c), \end{aligned}$$

so bestehen umgekehrt für die Grössen $x-a, y-b, z-c$ die Gleichungen

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{aligned} x-a &= \frac{\alpha-\alpha'\delta}{1-\delta^2}\cdot p + \frac{\alpha'-\alpha\delta}{1-\delta^2}\cdot p' + \frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{1-\delta^2}\cdot q \\ y-b &= \frac{\beta-\beta'\delta}{1-\delta^2}\cdot p + \frac{\beta'-\beta\delta}{1-\delta^2}\cdot p' + \frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{1-\delta^2}\cdot q \\ z-c &= \frac{\gamma-\gamma'\delta}{1-\delta^2}\cdot p + \frac{\gamma'-\gamma\delta}{1-\delta^2}\cdot p' + \frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{1-\delta^2}\cdot q, \end{aligned} \right.$$

und es findet noch die Relation

$$(1-\delta^2)\cdot\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\} = p^2+p'^2+q^2-2\delta pp'$$

statt; es sind dann ferner die durch die Formeln

$$(2.)\qquad \begin{cases} X = p \\ Y = \dfrac{\delta p - p'}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ Z = \dfrac{q}{\sqrt{1-\delta^2}} \end{cases}$$

bestimmten Grössen X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten des betrachteten unbestimmten Punktes (x, y, z), bezogen auf ein anderes rechtwinkliges Axensystem, dessen Ursprung der Punkt A ist, dessen X-Axe in die Richtung der Strecke AA'' fällt und dessen Z-Axe auf den beiden Strecken $A'A$ und AA'' senkrecht steht. Das System (X, Y, Z) kann mit dem System (x, y, z) zur Deckung gebracht werden.

Nach diesen Vorbereitungen nehme man an, es sei ein in der Umgebung des Punktes A gelegener Theil von (M) zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine Ebene (E) abgebildet, deren Punkte die Werthe einer complexen Veränderlichen u geometrisch darstellen. Man kann dabei voraussetzen, dass dem Eckpunkte A der reelle Werth $u = u_0$, den Punkten der Strecke AA'' reelle positive Werthe der Grösse $(u-u_0)$, den Punkten der Strecke $A'A$ reelle negative Werthe der Grösse $(u-u_0)$ entsprechen, während für alle inneren Punkte des abgebildeten Stückes von (M) der imaginäre Theil der Grösse u positive Werthe besitzt.

Wie in der Abhandlung »Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist« gezeigt worden, lassen sich die Coordinaten x, y, z in der Form

$$\begin{aligned} x &= \Re f(u), \\ y &= \Re g(u), \\ z &= \Re h(u) \end{aligned}$$

darstellen, wo das Zeichen $\Re$ angiebt, dass der reelle Theil der nachfolgenden Grösse zu nehmen ist, und unter $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ drei analytische

Functionen des complexen Arguments u verstanden werden, welche der Bedingung

$$\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dg(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2=0 \tag{3.}$$

Genüge leisten. Von ihnen wird vorausgesetzt, dass sie sich für alle Werthe der Variablen u, die im Innern und auf der Begrenzung des Ebenenstückes liegen, auf welches der betrachtete Theil von (M) conform abgebildet ist, regulär verhalten und den Charakter ganzer Functionen besitzen, mit Ausnahme des Werthes u_0; für diesen Werth und für seine Umgebung mögen die reellen Theile der drei Functionen $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ endlich und stetig sein.

Definirt man drei analytische Functionen P, P', Q des Arguments u durch die Formeln

$$\begin{aligned} P &= \alpha\,.\,f(u)+\beta\,.\,g(u)+\gamma\,.\,h(u),\\ P' &= \alpha'\,.\,f(u)+\beta'\,.\,g(u)+\gamma'\,.\,h(u),\\ Q &= (\gamma\beta'-\beta\gamma')f(u)+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')g(u)+(\beta\alpha'-\alpha\beta')h(u), \end{aligned}$$

so bestehen umgekehrt für die Functionen $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ drei Gleichungen, welche den obigen Formeln (1.) ähnlich lauten, und aus denen man mit Hülfe der Gleichung (3.) folgert, dass die drei Functionen P, P', Q der Relation

$$\left(\frac{dP}{du}\right)^2+\left(\frac{dP'}{du}\right)^2+\left(\frac{dQ}{du}\right)^2-2\delta\frac{dP}{du}\frac{dP'}{du}=0 \tag{4.}$$

Genüge leisten. Sie stehen mit den oben eingeführten Grössen p, p', q in folgender Beziehung: Bezeichnet man mit p_0, p_0', q_0 drei Constanten, welche die Werthe

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha\,.\,a+\beta\,.\,b+\gamma\,.\,c,\\ p_0' &= \alpha'\,.\,a+\beta'\,.\,b+\gamma'\,.\,c,\\ q_0 &= (\gamma\beta'-\beta\gamma')a+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')b+(\beta\alpha'-\alpha\beta')c \end{aligned}$$

besitzen, so gelten die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} p+p_0 &= \Re P\\ p'+p_0' &= \Re P'\\ q+q_0 &= \Re Q. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Es ist nun das Verhalten der drei Functionen P, P', Q für die der Umgebung der Stelle (u_0) angehörenden positiven und negativen reellen Werthe der Differenz $(u-u_0)$ gesondert zu untersuchen.

1. Es bezeichne s den Abstand eines beliebigen Punktes der gebrochenen Linie $A'AA''$ vom Punkte A, positiv in der Richtung AA'', negativ in der Richtung AA' gerechnet; dem Punkte A'' entspreche der Werth $u = u''$. Für das Intervall $(u_0 \dots u'')$ gelten dann die Gleichungen

$$x = \alpha s + a,$$
$$y = \beta s + b,$$
$$z = \gamma s + c,$$

und es nehmen die Grössen p, p', q die Werthe

$$p = s, \quad p' = \delta s, \quad q = 0$$

an, woraus dann mittels der Gleichungen (5.) folgt, dass

$$\Re(P' - \delta P) = p_0' - \delta p_0, \tag{6.}$$

$$\Re Q = q_0 \tag{7.}$$

ist. Für alle Werthe des Argumentes u, welche dem genannten Intervalle angehören, haben also die reellen Theile der Functionen $P' - \delta P$, Q constante Werthe. Daraus folgt, dass die beiden Ausdrücke $\frac{dP'}{du} - \delta \frac{dP}{du}$ und $\frac{dQ}{du}$ für dieselben Werthe von u rein imaginäre Werthe, ihre Quadrate also reelle negative Werthe besitzen. Beachtet man nun, dass zwischen den Grössen $\frac{dP}{du}$, $\frac{dP'}{du}$, $\frac{dQ}{du}$ die Gleichung (4.) besteht, welcher auch die Form

$$(1-\delta^2)\left(\frac{dP}{du}\right)^2 + \left(\frac{dP'}{du} - \delta \frac{dP}{du}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{du}\right)^2 = 0 \tag{8.}$$

gegeben werden kann, so sieht man, dass die Grösse $\left(\frac{dP}{du}\right)^2$ für die angegebenen Werthe von u ebenfalls nur reelle und zwar nur positive Werthe besitzen kann, den Werth Null nicht ausgeschlossen. Es ist daher

$$\Re\left(i \frac{dP}{du}\right) = 0.$$

Hieraus folgt, dass längs der Strecke AA''

$$\Re(iP) = C \tag{9.}$$

ist, unter C eine reelle Constante verstanden.

2. Dem Punkte A' entspreche der Werth $u = u'$. Für das Intervall $(u' \dots u_0)$ gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \alpha' s + a, \\ y &= \beta' s + b, \\ z &= \gamma' s + c. \end{aligned}$$

Durch Schlüsse, welche den unter 1. angegebenen völlig entsprechen, ergiebt sich, dass längs der Strecke $A'A$ die Gleichungen

$$(10.) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Re(P - \delta P') & = p_0 - \delta p_0' \\ \Re Q & = q_0 \\ \Re(iP') & = C' \end{array} \right.$$

bestehen, wo C' eine reelle Constante bezeichnet.

Setzt man

$$(11.) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} p_0 - iC & = P_0 \\ p_0' - iC' & = P_0' \\ q_0 & = Q_0, \end{array} \right.$$

so kann man unter Beachtung des Umstandes, dass die Constanten p_0, p_0', q_0, C, C' reelle Werthe besitzen, die gefundenen Ergebnisse (6.), (7.), (9.) und (10.) in die folgende Form setzen:

1. für das Intervall $(u_0 \dots u'')$:

$$\begin{aligned} \Re(i(P - P_0)) &= 0, \\ \Re(P' - P_0' - \delta(P - P_0)) &= 0, \\ \Re(Q - Q_0) &= 0; \end{aligned}$$

2. für das Intervall $(u' \dots u_0)$:

$$\begin{aligned} \Re(i(P' - P_0')) &= 0, \\ \Re(P - P_0 - \delta(P' - P_0')) &= 0, \\ \Re(Q - Q_0) &= 0. \end{aligned}$$

Die aus den Functionen $(P - P_0)$, $(P' - P_0')$, $(Q - Q_0)$ gebildeten Ausdrücke

$$\begin{aligned} & i\{P' - P_0' + e^{\nu\pi i}\ (P - P_0)\} \cdot (u - u_0)^{-\nu}, \\ & i\{P' - P_0' + e^{-\nu\pi i}(P - P_0)\} \cdot (u - u_0)^{\nu}, \\ & i\{Q - Q_0\} \end{aligned}$$

sind als Functionen der complexen Veränderlichen u zunächst nur für solche Werthe ihres Arguments erklärt, für welche

$$\Re i(u-u_0) \gtrless 0$$

ist, d. h. für alle solche der oben angegebenen Umgebung des Punktes (u_0) angehörenden Werthe von u, deren imaginärer Theil nicht negativ ist. Für diese sämmtlichen Werthe — den Punkt (u_0) zunächst ausgeschlossen — besitzen diese Functionen den Charakter ganzer Functionen. Sie haben aber ferner die Eigenschaft, für die der genannten Umgebung angehörenden reellen Werthe ihres Arguments ebenfalls nur reelle Werthe anzunehmen. Nach einem bekannten Theoreme*) ist es daher möglich, dadurch dass conjugirten Werthen des Arguments u conjugirte Werthe der drei Functionen zugeordnet werden, die Erklärung der letzteren auf die ganze Umgebung des Punktes (u_0) in der Weise auszudehnen, dass sie für alle dieser Umgebung angehörenden Werthe ihres Arguments — den Werth u_0 zunächst noch ausgenommen — den Charakter ganzer Functionen besitzen. Es ist daher jede der drei angegebenen Functionen für die Umgebung des Werthes u_0 in eine Reihe entwickelbar, welche nach Potenzen der Grösse $(u-u_0)$ mit reellen ganzzahligen positiven und negativen Exponenten fortschreitet, und in welcher die Coefficienten der einzelnen Glieder sämmtlich reelle Werthe besitzen.

Man kann demnach unter Abtrennung des constanten und reellen Factors $2\sin(\nu\pi)$

$$(12.)\quad \begin{cases} \{P'-P_0'+e^{\nu\pi i}\,(P-P_0)\}(u-u_0)^{-\nu} = & 2i\sin(\nu\pi)\cdot P^*(u\,|\,u_0) \\ \{P'-P_0'+e^{-\nu\pi i}(P-P_0)\}(u-u_0)^{\nu} = & -2i\sin(\nu\pi)\cdot Q^*(u\,|\,u_0) \\ Q-Q_0 = & -2i\sin(\nu\pi)\cdot R^*(u\,|\,u_0) \end{cases}$$

setzen, wobei $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$, $R^*(u\,|\,u_0)$ wieder drei Potenzreihen von $(u-u_0)$ bedeuten, welche die eben angegebenen Eigenschaften besitzen. Diese drei Reihen convergiren unbedingt für alle Werthe der Variablen u, für welche der absolute Betrag der Grösse $(u-u_0)$ eine vorgeschriebene hinreichend kleine von Null verschiedene positive Zahl ε_0 nicht übersteigt.

*) Man vergleiche: »Gesammelte Mathematische Abhandlungen« von H. A. Schwarz (Berlin 1890), Bd. II, S. 66.

Für das Folgende von der wesentlichsten Bedeutung ist nun die Möglichkeit des Nachweises, dass in den Potenzreihen $P^*(u|u_0)$, $Q^*(u|u_0)$, $R^*(u|u_0)$ die Coefficienten sämmtlicher Glieder mit negativen Exponenten verschwinden, mit anderen Worten, dass die betrachteten drei Functionen für die Umgebung des Werthes u_0 auch mit Einschluss desselben den Charakter ganzer Functionen haben.

Für die Function $R^*(u|u_0)$ ergiebt sich dieser Schluss sofort aus dem Umstande, dass die Grösse q, der reelle Theil der Function

$$Q - Q_0 = -2i\sin(\nu\pi)\cdot R^*(u|u_0), \tag{13.}$$

in der ganzen Umgebung der Stelle (u_0) und für diese Stelle selbst endlich und stetig bleibt.

Für die Functionen $P^*(u|u_0)$ und $Q^*(u|u_0)$ kann die angegebene Eigenschaft auf folgende Weise dargethan werden.

Aus den Gleichungen (12.) ergiebt sich zunächst

$$\left\{\begin{aligned} P - P_0 &= (u-u_0)^\nu\cdot P^*(u|u_0) + (u-u_0)^{-\nu}\cdot Q^*(u|u_0) \\ P' - P_0' &= -e^{-\nu\pi i}(u-u_0)^\nu\cdot P^*(u|u_0) - e^{\nu\pi i}(u-u_0)^{-\nu}\cdot Q^*(u|u_0) \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

und ferner

$$\begin{aligned} P - P_0 - i\frac{P' - P_0' + (P-P_0)\cos(\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} &= 2(u-u_0)^\nu\, P^*(u|u_0), \\ P - P_0 + i\frac{P' - P_0' + (P-P_0)\cos(\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} &= 2(u-u_0)^{-\nu} Q^*(u|u_0), \\ \frac{Q - Q_0}{\sin(\nu\pi)} &= -2i\,R^*(u|u_0). \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun mit u_1 die zu u conjugirte complexe Grösse und beachtet, dass die Coefficienten der Potenzreihen P^*, Q^*, R^* sämmtlich reelle Werthe haben, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen unter Berücksichtigung von (2.), (5.) und (11.)

$$\left\{\begin{aligned} X + iY &= (u-u_0)^\nu P^*(u|u_0) + (u_1-u_0)^{-\nu} Q^*(u_1|u_0) \\ X - iY &= (u_1-u_0)^\nu P^*(u_1|u_0) + (u-u_0)^{-\nu} Q^*(u|u_0) \\ Z &= -i(R^*(u|u_0) - R^*(u_1|u_0)). \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

Es werde ferner, unter n eine ganze Zahl und unter f_n, g_n, h_n reelle Grössen

verstanden,

$$P^*(u\,|\,u_0) = \sum_n f_n(u-u_0)^n, \qquad (n=-\infty\cdots+\infty)$$
$$Q^*(u\,|\,u_0) = \sum_n g_n(u-u_0)^n, \qquad (n=-\infty\cdots+\infty)$$
$$R^*(u\,|\,u_0) = \sum_n h_n(u-u_0)^n \qquad (n=+1,\ \cdots+\infty)$$

gesetzt, wo der Summationsbuchstabe n in den beiden ersten Summen alle ganzen Zahlen, in der dritten nur alle positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat. Bestimmt man endlich eine positive Grösse ε und eine dem Intervall $0 \leqq w \leqq \pi$ angehörende Grösse w der Art, dass die Gleichungen

$$u - u_0 = \varepsilon e^{wi},$$
$$u_1 - u_0 = \varepsilon e^{-wi}$$

erfüllt sind, und versteht unter m eine beliebige ganze Zahl, so ist

$$e^{(m-\nu)wi}.(X+iY) = \sum_n f_n \varepsilon^{n+\nu} e^{(m+n)wi} + \sum_n g_n \varepsilon^{n-\nu} e^{(m-n)wi}$$
$$= \sum_n \{f_{n-m}\varepsilon^{n-m+\nu} + g_{m-n}\varepsilon^{m-n-\nu}\} e^{nwi},$$
$$(n=-\infty\cdots+\infty)$$

oder, wenn von beiden Seiten dieser Gleichung der reelle Theil genommen wird,

$$X\cos((m-\nu)w) - Y\sin((m-\nu)w) = \sum_n \{f_{n-m}\varepsilon^{n-m+\nu} + g_{m-n}\varepsilon^{m-n-\nu}\}\cos(nw)$$
$$(n=-\infty\cdots+\infty).$$

Aus dieser Formel ergiebt sich durch Integration in Bezug auf die Variable w zwischen den Grenzen 0 und π die folgende

$$\int_0^\pi \{X\cos((m-\nu)w) - Y\sin((m-\nu)w)\}\,dw = \pi(f_{-m}\varepsilon^{\nu-m} + g_m\varepsilon^{m-\nu}),$$

in welcher der Ausdruck auf der linken Seite eine stetige Function der Variablen ε ist von der Eigenschaft, dass sie, wenn ε unendlich klein wird, ebenfalls unendlich klein wird. Diese Eigenschaft muss also auch für den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck gelten, wie auch immer die ganze Zahl m gewählt werden möge. Wird der Grösse m der Werth Null beigelegt, so folgt, dass der Coefficient g_0 verschwinden muss, weil andernfalls der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Ausdruck für unendlich kleine Werthe von ε dem absoluten Betrage nach unendlich grosse Werthe

annehmen würde. Wird der ganzen Zahl m ein positiver von Null verschiedener Werth beigelegt, so folgt aus denselben Gründen, dass der Coefficient f_{-m} verschwinden muss. Wird der ganzen Zahl m endlich ein negativer von Null verschiedener Werth beigelegt, so folgt, dass auch der Coefficient g_m verschwinden muss. Es ist also

$$f_n = 0, \qquad (\text{für } n = -1, \cdots -\infty)$$
$$g_n = 0 \qquad (\text{für } n = 0, -1, -2, \cdots -\infty).$$

Damit ist auch für die Functionen $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$ die oben ausgesprochene Behauptung erwiesen. Es hören demnach die durch die Gleichungen (12.) definirten Functionen auch an der Stelle (u_0) nicht auf, den Charakter ganzer Functionen zu besitzen.

Nachdem dies festgestellt ist, mögen mit

$$\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{c}$$

die Ordnungszahlen der Glieder niedrigster Ordnung in den Potenzreihen

$$P^*(u\,|\,u_0), \quad Q^*(u\,|\,u_0), \quad R^*(u\,|\,u_0)$$

bezeichnet werden, so dass

$$P^*(u\,|\,u_0) = \sum_n f_n(u-u_0)^n, \qquad (n \geqq \mathfrak{a} \geqq 0, \quad |f_\mathfrak{a}| > 0)$$
$$Q^*(u\,|\,u_0) = \sum_n g_n(u-u_0)^n, \qquad (n \geqq \mathfrak{b} \geqq 1, \quad |g_\mathfrak{b}| > 0)$$
$$R^*(u\,|\,u_0) = \sum_n h_n(u-u_0)^n \qquad (n \geqq \mathfrak{c} \geqq 1, \quad |h_\mathfrak{c}| > 0)$$

ist. Die ganzen positiven Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind nicht unabhängig von einander, denn zwischen den Functionen $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$, $R^*(u\,|\,u_0)$ besteht die Beziehung

$$(16.) \qquad \frac{d}{du}[(u-u_0)^\nu P^*(u\,|\,u_0)] \cdot \frac{d}{du}[(u-u_0)^{-\nu} Q^*(u\,|\,u_0)] = \left(\frac{d}{du} R^*(u\,|\,u_0)\right)^2,$$

welche sich aus der Gleichung (8.) dadurch ergiebt, dass man in ihr die Functionen P, P', Q durch $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$, $R^*(u\,|\,u_0)$ mittels der Formeln (13.) und (14.) ausdrückt. Die vorstehende Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn die Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Bedingung

$$(17.) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 2\mathfrak{c}$$

genügen, während unter den Coefficienten $f_{\mathfrak{a}}$, $g_{\mathfrak{b}}$, $h_{\mathfrak{c}}$ die Gleichung

$$(\mathfrak{a}+\nu)(\mathfrak{b}-\nu) f_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}^2 h_{\mathfrak{c}}^2$$

stattfindet. Es ist zu beachten, dass die Zahl $\mathfrak{b}$ unter den angegebenen Voraussetzungen den Werth 1 nicht annehmen kann, wie sich durch folgende Betrachtung ergiebt. Angenommen zunächst, es wäre $\mathfrak{a}$ gleich Null, während $\mathfrak{b}$ den Werth 1 hätte, so würde, da die Zahl $\mathfrak{c}$ mindestens gleich 1 ist, der Bedingung (17.) nicht genügt werden können. Wäre aber $\mathfrak{a}$ positiv, während $\mathfrak{b}$ den Werth 1 hätte, so würde, wie die erste der Gleichungen (15.) zeigt, das in dem Ausdrucke von $(X+iY)$ enthaltene Glied niedrigster Dimension in Bezug auf die Grösse ε den Exponenten $(1-\nu)$ haben, also, abgesehen von Gliedern höherer Dimension,

$$X+iY = g_1 . \varepsilon^{1-\nu} e^{-(\mathfrak{a}-\nu) w i} + \cdots$$

sein; dies steht aber im Widerspruch damit, dass wenn man der Grösse ε einen genügend kleinen constanten Werth beilegt und die Grösse w das Intervall $(0 \ldots \pi)$ durchlaufen lässt, die Grösse $(X+iY)$ einen Winkel überstreichen muss, der, von einem Vielfachen von 2π abgesehen, gleich $\nu\pi$ ist. Demnach sind die ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ausser der Gleichung (17.), noch den Bedingungen

$$\mathfrak{a} \geqq 0, \quad \mathfrak{b} \geqq 2, \quad \mathfrak{c} \geqq 1$$

zu unterwerfen.

Es soll nun von der Voraussetzung Gebrauch gemacht werden, dass das untersuchte Minimalflächenstück in der Umgebung des Eckpunktes A die Eigenschaft besitzt, ein einfaches Flächenstück zu sein, d. h. es sollen zu verschiedenen Werthen des Argumentes u auch verschiedene Werthe der Grössen X, Y, Z gehören. Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass entweder die ganze Zahl $\mathfrak{a}$ den Werth 0, oder die ganze Zahl $\mathfrak{b}$ den Werth 2 habe. Tritt nämlich keiner dieser beiden Fälle ein, so lässt sich zeigen, dass das durch die Formeln (15.) analytisch dargestellte Minimalflächenstück in seinem Innern jedesmal mindestens eine vom Eckpunkte A ausgehende Doppelcurve besitzt. Die reellen Constanten

$$f_n \quad (n \geqq \mathfrak{a}), \quad g_n \quad (n \geqq \mathfrak{b}), \quad h_n \quad (n \geqq \mathfrak{c})$$

sind hierbei keinen anderen Bedingungen zu unterwerfen, als der, dass die

Potenzreihen $P^*(u|u_0)$, $Q^*(u|u_0)$, $R^*(u|u_0)$ für alle Werthe der Variablen u convergent sind, für welche

$$|u-u_0|<\varepsilon_0$$

ist, und dass für den durch die vorstehende Ungleichheit definirten Bereich die Gleichung (16.) erfüllt ist.

Nach diesen Darlegungen sind gemäss den Beschränkungen, denen die ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu unterwerfen sind, folgende Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \mathfrak{a}=0,\ \mathfrak{b}=2,\\ &\text{II.} && \mathfrak{a}=0,\ \mathfrak{b}>2,\\ &\text{III.} && \mathfrak{a}>0,\ \mathfrak{b}=2; \end{aligned}$$

demnach ergeben sich diesen drei Fällen entsprechend für die Grössen X, Y, Z, durch welche das Minimalflächenstück analytisch bestimmt wird, folgende Entwickelungen nach Potenzen der Grösse ε, von denen jedoch immer nur das Anfangsglied angegeben werden soll.

I.

$$\begin{aligned} X+iY &= f_0\varepsilon^\nu e^{\nu wi}+\cdots, && (f_0>0)\\ X-iY &= f_0\varepsilon^\nu e^{-\nu wi}+\cdots, &&\\ Z &= 2h_1\varepsilon\sin w+\cdots, && (\mathfrak{c}=1)\\ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} &= f_0\varepsilon^\nu+\cdots, &&\\ \frac{X+iY}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= e^{\nu wi}+\cdots, &&\\ \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= 2\frac{h_1}{f_0}\varepsilon^{1-\nu}\sin w+\cdots. && \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} X+iY &= f_0\varepsilon^\nu e^{\nu wi}+\cdots, && (f>0)\\ X-iY &= f_0\varepsilon^\nu e^{-\nu wi}+\cdots, &&\\ Z &= 2h_c\varepsilon^c\sin(cw)+\cdots, && (\mathfrak{c}>1)\\ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} &= f_0\varepsilon^\nu+\cdots, &&\\ \frac{X+iY}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= e^{\nu wi}+\cdots, &&\\ \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= 2\frac{h_c}{f_0}\varepsilon^{c-\nu}\sin(cw)+\cdots. && \end{aligned}$$

III.

$$
\begin{aligned}
X+iY &= g_\nu \varepsilon^{\nu-\nu} e^{-(\nu-\nu)w i}+\cdots, && (g_\nu > 0)\\
X-iY &= g_\nu \varepsilon^{\nu-\nu} e^{(\nu-\nu)w i}+\cdots, &&\\
Z &= 2h_c \varepsilon^c \sin(cw)+\cdots, && (c \geqq 2)\\
\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} &= g_\nu \varepsilon^{\nu-\nu}+\cdots, &&\\
\frac{X+iY}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= e^{-(\nu-\nu)w i}+\cdots, &&\\
\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} &= 2\frac{h_c}{g_\nu}\varepsilon^{c-(\nu-\nu)}\sin(cw)+\cdots.
\end{aligned}
$$

Die ursprünglichen Coordinaten x, y, z findet man nach Ermittelung der drei Functionen $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$, $R^*(u\,|\,u_0)$ und Bestimmung von P, P', Q aus den Gleichungen (13.), (14.) durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha-\alpha'\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P+\frac{\alpha'-\alpha\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P'+\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{1-\delta^2}\cdot \Re Q,\\
y &= \frac{\beta-\beta'\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P+\frac{\beta'-\beta\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P'+\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{1-\delta^2}\cdot \Re Q,\\
z &= \frac{\gamma-\gamma'\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P+\frac{\gamma'-\gamma\delta}{1-\delta^2}\cdot \Re P'+\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{1-\delta^2}\cdot \Re Q,
\end{aligned}
$$

welche sich aus den Gleichungen (1.) sofort ergeben.

* * *

Durch die vorstehenden Untersuchungen sind die verschiedenen Möglichkeiten erschöpft, welche unter den angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich der Beschaffenheit eines in der Nähe der Ecke A liegenden Stückes einer Minimalfläche eintreten können, dessen Begrenzung die beiden auf einander folgenden geradlinigen Strecken $A'A$, AA'' enthält.

Es seien nun $G^*(u)$, $H^*(u)$ zwei Functionen des Argumentes u, welche mit den Functionen $P^*(u\,|\,u_0)$, $Q^*(u\,|\,u_0)$, $R^*(u\,|\,u_0)$ durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left((u-u_0)^\nu\, P^*(u\,|\,u_0)\right) &= -(H^*(u))^2,\\
\frac{d}{du}\left((u-u_0)^{-\nu} Q^*(u\,|\,u_0)\right) &= (G^*(u))^2,\\
\frac{d}{du} R^*(u\,|\,u_0) &= i\,G^*(u)\,H^*(u)
\end{aligned}
$$

verbunden sind. Diese beiden Functionen sind, abgesehen von einem ihnen gemeinsamen Factor ± 1, durch die vorstehenden Gleichungen eindeutig bestimmt und zwar so, dass die erwähnte Differentialgleichung (16.) identisch erfüllt ist. In der Umgebung der Stelle (u_0) werden sie durch Ausdrücke von folgender Form analytisch dargestellt:

$$\begin{aligned} G^*(u) &= (u-u_0)^{+\frac{1}{2}(1-\nu)}\,\mathfrak{P}_1(u\,|\,u_0), \\ H^*(u) &= i(u-u_0)^{-\frac{1}{2}(1-\nu)}\,\mathfrak{P}_2(u\,|\,u_0); \end{aligned}$$

in ihnen bezeichnen $\mathfrak{P}_1(u\,|\,u_0)$, $\mathfrak{P}_2(u\,|\,u_0)$ Reihen, welche nur Potenzen der Grösse $(u-u_0)$ mit ganzzahligen positiven Exponenten enthalten, während die Coefficienten aller Glieder reelle Werthe haben. In Folge dieser Entwickelungen der Functionen $G^*(u)$, $H^*(u)$ bestehen aber folgende Gleichungen, in denen $\mathfrak{P}_3(u\,|\,u_0)$, $\mathfrak{P}_4(u\,|\,u_0)$, $\mathfrak{P}_5(u\,|\,u_0)$ ebensolche Potenzreihen bezeichnen, wie $\mathfrak{P}_1(u\,|\,u_0)$, $\mathfrak{P}_2(u\,|\,u_0)$:

$$\begin{vmatrix} G^*(u), & H^*(u) \\ \frac{d}{du}G^*(u), & \frac{d}{du}H^*(u) \end{vmatrix} = i(u-u_0)^{-1}\,\mathfrak{P}_3(u\,|\,u_0),$$

$$\begin{vmatrix} G^*(u), & H^*(u) \\ \frac{d^2}{du^2}G^*(u), & \frac{d^2}{du^2}H^*(u) \end{vmatrix} = i(u-u_0)^{-2}\,\mathfrak{P}_4(u\,|\,u_0),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{du}G^*(u), & \frac{d}{du}H^*(u) \\ \frac{d^2}{du^2}G^*(u), & \frac{d^2}{du^2}H^*(u) \end{vmatrix} = i(u-u_0)^{-3}\,\mathfrak{P}_5(u\,|\,u_0).$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Functionen $G^*(u)$, $H^*(u)$ zwei particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathfrak{P}_3(u\,|\,u_0)\cdot\frac{d^2W}{du^2} - \frac{1}{u-u_0}\,\mathfrak{P}_4(u\,|\,u_0)\cdot\frac{dW}{du} + \frac{1}{(u-u_0)^2}\,\mathfrak{P}_5(u\,|\,u_0)\cdot W = 0$$

sind.

Setzt man nun in Übereinstimmung mit den Festsetzungen der anfangs citirten Abhandlung

$$\begin{aligned} f'(u) &= G^2(u) - H^2(u), \\ g'(u) &= i(G^2(u) + H^2(u)), \\ h'(u) &= 2G(u)\,H(u), \end{aligned}$$

wo dann die Gleichung (3.) identisch erfüllt ist, so ergeben sich die Functionen $G(u)$, $H(u)$ als ganze homogene Functionen ersten Grades der Functionen $G^*(u)$, $H^*(u)$,

$$G(u) = C_1 G^*(u) + C_2 H^*(u),$$
$$H(u) = C_3 G^*(u) + C_4 H^*(u).$$

Für gegebene Werthe der Grössen α, β, γ; α', β', γ' können die Constanten C_1, C_2, C_3, C_4, welche stets die Gleichung $C_1 C_4 - C_2 C_3 = 1$ befriedigen, nur zwei von einander verschiedene Systeme von Werthen annehmen; die Werthe des einen dieser beiden Systeme gehen aus denen des anderen durch Multiplication mit -1 hervor.

Die Beziehung der Functionen $G^*(u)$, $H^*(u)$ zu dem Systeme der Coordinaten X, Y, Z ist der Beziehung der Functionen $G(u)$, $H(u)$ zu dem Systeme der Grössen x, y, z analog.

Zwischen den Coordinaten x, y, z und X, Y, Z desselben Punktes bestehen die Gleichungen

$$x - a = \alpha X + \frac{\alpha\delta - \alpha'}{\sqrt{1-\delta^2}} Y + \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\sqrt{1-\delta^2}} Z,$$
$$y - b = \beta X + \frac{\beta\delta - \beta'}{\sqrt{1-\delta^2}} Y + \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\sqrt{1-\delta^2}} Z,$$
$$z - c = \gamma X + \frac{\gamma\delta - \gamma'}{\sqrt{1-\delta^2}} Y + \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\sqrt{1-\delta^2}} Z.$$

Die Coefficienten der einzelnen Glieder der auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücke können in bekannter Weise wie folgt als eindeutige Functionen dreier Grössen $(2\Theta, 2\varepsilon', 2\varepsilon'')$ dargestellt werden:

$$\alpha = \cos 2\Theta \cos 2\varepsilon' \cos 2\varepsilon'' - \sin 2\varepsilon' \sin 2\varepsilon'',$$
$$\beta = \cos 2\Theta \cos 2\varepsilon' \sin 2\varepsilon'' + \sin 2\varepsilon' \cos 2\varepsilon'',$$
$$\gamma = -\sin 2\Theta \cos 2\varepsilon',$$

$$\frac{\alpha\delta - \alpha'}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\cos 2\Theta \sin 2\varepsilon' \cos 2\varepsilon'' - \cos 2\varepsilon' \sin 2\varepsilon'',$$
$$\frac{\beta\delta - \beta'}{\sqrt{1-\delta^2}} = -\cos 2\Theta \sin 2\varepsilon' \sin 2\varepsilon'' + \cos 2\varepsilon' \cos 2\varepsilon'',$$
$$\frac{\gamma\delta - \gamma'}{\sqrt{1-\delta^2}} = \sin 2\Theta \sin 2\varepsilon',$$

$$\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\sqrt{1-\delta^2}} = \sin 2\Theta \cos 2\varepsilon'',$$

$$\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\sqrt{1-\delta^2}} = \sin 2\Theta \sin 2\varepsilon'',$$

$$\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\sqrt{1-\delta^2}} = \cos 2\Theta.$$

Für vorgeschriebene Werthe von $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ giebt es, wenn von den Fällen abgesehen wird, in denen sich für $\cos 2\Theta$ einer der Werthe $+1, -1$ herausstellt, nur ein einziges den vorstehenden Gleichungen genügendes und die Bedingungen

$$0 < \Theta < \tfrac{1}{2}\pi, \quad 0 \leqq \varepsilon' < \pi, \quad 0 \leqq \varepsilon'' < \pi$$

befriedigendes System von Werthen $(\Theta, \varepsilon', \varepsilon'')$.

Aus jedem solchen Systeme $(\Theta, \varepsilon', \varepsilon'')$ ergiebt sich mittels der Gleichungen

$$C_1 = \cos\Theta \cdot e^{-(\varepsilon'+\varepsilon'')i}, \quad C_2 = \sin\Theta \cdot e^{(\varepsilon'-\varepsilon'')i},$$
$$C_3 = -\sin\Theta \cdot e^{-(\varepsilon'-\varepsilon'')i}, \quad C_4 = \cos\Theta \cdot e^{(\varepsilon'+\varepsilon'')i}$$

eines der beiden Systeme von Werthen, welche die Constanten C_1, C_2, C_3, C_4 unter den angegebenen Voraussetzungen annehmen können.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass die Functionen $G(u)$, $H(u)$ ebenfalls particuläre Integrale der oben erwähnten linearen homogenen Differentialgleichung sind.

* * *

Nunmehr betrachte man ein einfach zusammenhängendes von n ganz im Endlichen liegenden geradlinigen Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n, A_nA_1$ begrenztes Minimalflächenstück (M); es soll vorausgesetzt werden, dass es in seinem Innern keine Punktsingularität, und in der Nähe jedes der n Eckpunkte die im Vorhergehenden angegebene Beschaffenheit besitzt. Man bilde das Flächenstück (M) auf die Halbebene

$$\Re\left(\frac{1}{i}u\right) \geqq 0$$

zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich ab, wobei den Eck-

punkten

$$A_1, A_2, \dots A_n$$

die Werthe

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

des complexen Argumentes u entsprechen mögen. Von diesen kann vorausgesetzt werden, dass sie sämmtlich reell und endlich sind. Wird das Flächenstück mittels der beiden Functionen $G(u)$, $H(u)$ analytisch dargestellt, so müssen diese für die Umgebungen der singulären Stellen ($u = u_1, u_2, \dots u_n$) sich analog verhalten, wie die im Vorhergehenden betrachteten Functionen $G(u)$, $H(u)$ für die dem Eckpunkte A entsprechende singuläre Stelle ($u = u_0$). Der Werth $u = \infty$ ist für die Functionen $G(u)$, $H(u)$ insofern nicht singulär, als sie in seiner Umgebung den Charakter rationaler Functionen besitzen, welche für unendlich grosse Werthe des Argumentes u unendlich klein werden. In der Umgebung der Stelle ($u = \infty$) gelten demnach Gleichungen von der Form

$$\begin{vmatrix} G(u), & H(u) \\ G'(u), & H'(u) \end{vmatrix} = u^{-4}\mathfrak{P}_6\left(\frac{1}{u}\right),$$

$$\begin{vmatrix} G(u), & H(u) \\ G''(u), & H''(u) \end{vmatrix} = u^{-5}\mathfrak{P}_7\left(\frac{1}{u}\right),$$

$$\begin{vmatrix} G'(u), & H'(u) \\ G''(u), & H''(u) \end{vmatrix} = u^{-6}\mathfrak{P}_8\left(\frac{1}{u}\right);$$

in ihnen bezeichnen $\mathfrak{P}_6\left(\frac{1}{u}\right)$, $\mathfrak{P}_7\left(\frac{1}{u}\right)$, $\mathfrak{P}_8\left(\frac{1}{u}\right)$ drei Functionen des Argumentes u, welche für unendlich grosse Werthe des Argumentes den Charakter rationaler Functionen besitzen, die für die Umgebung des Werthes $u = \infty$ endlich bleiben.

Die Functionen

$$\begin{vmatrix} G(u), & H(u) \\ G'(u), & H'(u) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} G(u), & H(u) \\ G''(u), & H''(u) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} G'(u), & H'(u) \\ G''(u), & H''(u) \end{vmatrix}$$

besitzen also folgende Eigenschaften: sie haben für alle endlichen Werthe des Argumentes u mit Ausnahme der Werthe

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

den Charakter ganzer rationaler Functionen, und für die Werthe

$$u_1, u_2, \ldots u_n \text{ und } \infty$$

den Charakter gebrochener rationaler Functionen. Sie sind demnach nach einem bekannten Satze aus der Theorie der analytischen Functionen selbst rationale Functionen des Argumentes u.

Nunmehr ist die Aufgabe der analytischen Bestimmung eines Minimalflächenstückes (M) mit vorgeschriebener aus n geradlinigen Strecken bestehender Begrenzung zurückgeführt auf die Ermittelung zweier particulären Integrale $G(u)$, $H(u)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variablen u sind. Für reelle Werthe des Argumentes u nehmen diese Functionen ebenfalls reelle Werthe an.

Damit ist die in der eingangs erwähnten Abhandlung zuerst veröffentlichte Fundamentaleigenschaft der Functionen $G(u)$, $H(u)$ bewiesen.

Die Function $G(u)H'(u)-H(u)G'(u)$, welche nach dem Vorstehenden eine rationale Function des Argumentes u ist, kann, als Quotient zweier ganzen Functionen dargestellt, die keinen gemeinsamen Theiler haben, im Nenner keine anderen Factoren enthalten, als diejenigen des Productes

$$(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_n).$$

Der Zähler aber ist, da die betrachtete Function für $u=\infty$ mindestens von der vierten Ordnung unendlich klein werden muss, eine ganze rationale Function höchstens $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades. Der Grad der betrachteten rationalen Function ist daher höchstens gleich n. Jeder der Werthe, für welche der Zähler verschwindet, und der Werth $u=\infty$ ist für die lineare homogene Differentialgleichung eine ausserwesentlich singuläre Stelle.

ANMERKUNG.

Die vorstehende, noch nicht veröffentlichte Abhandlung hat Herr H. A. Schwarz auf Weierstrass' Wunsch nach einer ihm mitgetheilten, ausschliesslich Formeln enthaltenden Aufzeichnung ausgearbeitet.

K.

ÜBER EINE BESONDERE GATTUNG VON MINIMALFLÄCHEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 1. August 1867.)

Meine heutige Mittheilung bezieht sich auf eine bemerkenswerthe Gattung periodischer Minimalflächen, auf die ich gekommen bin, als ich mich vor einiger Zeit mit der Beurtheilung der am Leibniz-Tage d. J. von der Akademie gekrönten Preisschrift, deren Verfasser Herr H. A. Schwarz ist,*) zu beschäftigen hatte.

Versteht man unter $\varphi(s)$ eine algebraische Function eines complexen Arguments s — die jedoch nicht die dritte Ableitung einer ebenfalls algebraischen Function sein darf — so wird, wie ich bei einer andern Gelegenheit zeigen werde, durch die Gleichungen

$$x = \Re\int(1-s^2)\,\varphi(s)\,ds$$
$$y = \Re\int i(1+s^2)\,\varphi(s)\,ds$$
$$z = \Re\int 2s\,\varphi(s)\,ds,$$

in denen x, y, z orthogonale Punkt-Coordinaten bedeuten, eine Minimalfläche dargestellt,**) welche die ausgezeichnete, in der Periodicität der Integrale algebraischer Differentiale begründete Eigenschaft besitzt, dass sie sich in unendlich viele congruente, gleichliegende und einfach zusammenhangende Theile zerlegen lässt, also eine periodische Fläche ist. Versucht man aber, dieselbe durch eine für alle ihre Punkte geltende Gleichung zwischen

*) S. den Bericht über die öffentliche Sitzung vom 4. Juli d. J.

**) Vgl. meine Abhandlung in den vorjährigen Monatsberichten, S. 619. [S. 43 dieses Bandes.]

x, y, z zu definiren, so stellt sich heraus, dass dies nur in wenigen Fällen möglich ist. Denn eine solche Gleichung kann nur existiren, wenn in einen nach allen Richtungen hin begrenzten Theil des Raums nur eine endliche Anzahl jener Theile der Fläche eintritt — eine Bedingung, welche unter der gestatteteten Voraussetzung einer Zerlegung der Fläche, bei der mit jedem ihrer Theile dieselbe, aber möglichst geringe Anzahl anderer unmittelbar zusammenhängt, nur dann erfüllt ist, wenn diese Anzahl, die stets gerade ist, 2, 4 oder 6 beträgt, während sich leicht zeigen lässt, dass sie beliebig gross werden kann.

Noch mehr beschränkt wird die Wahl der Function $\varphi(s)$, wenn die Theile der Fläche alle eine endliche Ausdehnung haben sollen, indem dann die in den Ausdrücken von x, y, z vorkommenden Integrale von der ersten Gattung sein müssen.

In der genannten Schrift hat nun Herr Schwarz die Gleichungen zweier speciellen Flächen der in Rede stehenden Art $\left(\varphi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pm(1-14s^4+s^8)}}\right)$ wirklich hergeleitet, und es ergiebt sich aus diesen Gleichungen sowohl als aus der geometrischen Entstehungsweise der Flächen, dass sie in der That allen angegebenen Bedingungen genügen.

Es lässt sich nämlich bei der einen wie bei der anderen der Raum durch drei Systeme äquidistanter Ebenen so in Würfel zerlegen, dass in jedem einzelnen ein einfach zusammenhangendes Stück der Fläche enthalten ist, an welches sich in jedem der sechs benachbarten Würfel ein congruentes und gleichliegendes anschliesst.

Indem ich mir klar machte, in welcher Eigenthümlichkeit der Function $\varphi(s)$ diese merkwürdige Beschaffenheit der beiden Flächen ihren Grund hat, fand ich, dass es eine wohl definirte Gattung ähnlich gestalteter Minimalflächen giebt, bei denen an die Stelle jener Würfel Parallelepipeda treten, und erhielt zugleich die allgemeine Gleichung derselben in höchst einfacher und ansprechender Form.

Es liegt nahe, $\varphi(s)$ gleich dem reciproken Werthe der Quadratwurzel aus einer ganzen Function $R(s)$ achten oder siebenten Grades zu setzen, damit man in den Ausdrücken von x, y, z Integrale erster Gattung erhalte, wie es sein muss. Dann hat man, wenn a einen der Werthe von s, für welche $R(s)$ verschwindet, bezeichnet, und unter $a_1, s_1, \sqrt{R_1(s_1)}$ die mit

$a, s, \sqrt{R(s)}$ conjugirten complexen Grössen verstanden werden,

$$x = x_0 + \int_a \frac{1-s^2}{2} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} + \int_{a_1} \frac{1-s_1^2}{2} \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}$$

$$y = y_0 + \int_a i \frac{1+s^2}{2} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} - \int_{a_1} i \frac{1+s_1^2}{2} \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}$$

$$z = z_0 + \int_a \frac{s\,ds}{\sqrt{R(s)}} + \int_{a_1} \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}},$$

wo x_0, y_0, z_0 reelle Constanten bedeuten.

Damit aber aus diesen Gleichungen die Grössen s, s_1 sich eliminiren lassen, gebe ich den Coefficienten von $R(s)$ solche Werthe, dass die Differentiale

$$\frac{1-s_1^2}{2} \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}, \quad -i \frac{1+s_1^2}{2} \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}, \quad \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}$$

durch eine Substitution gleichzeitig auf die Form der drei anderen gebracht werden können. Denn dann besteht, wie sich aus der Theorie der hyperelliptischen Functionen ergiebt, zwischen x, y, z in der That eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

in welcher der Ausdruck auf der linken Seite eine für alle endlichen Werthe von x, y, z eindeutig definirte Function ist.

Bezeichnet man die für s_1 einzuführende neue Veränderliche mit s', so muss

$$\frac{1-s_1^2}{2s_1} = \frac{1-s'^2}{2s'}, \quad i\frac{1+s_1^2}{2s_1} = -i\frac{1+s'^2}{2s'}$$

sein, und somit

$$s' = -\frac{1}{s_1},$$

$$\sqrt{R(s')} = -\frac{1}{s_1^4}\sqrt{R_1(s_1)}.$$

Es sind also die Coefficienten von $R(s)$ so anzunehmen, dass

$$s_1^6 R\left(-\frac{1}{s_1}\right) = R_1(s_1),$$

oder, was dasselbe ist,

$$s^6 R\left(-\frac{1}{s}\right) = R_1(s)$$

wird. Daraus ergiebt sich

$$R(s) = A_0(s^8+1) + A_1(s^7-s) + A_2(s^6+s^2) + A_3(s^5-s^3) + B_0(s^8-1)i + B_1(s^7+s)i + B_2(s^6-s^2)i + B_3(s^5+s^3)i + Cs^4,$$

wo $A_0, B_0, \ldots C$ reelle Constanten bedeuten.

Es kann jedoch die Anzahl dieser Constanten noch reducirt werden.

Repräsentirt man die Werthe von s in der bekannten Weise durch Punkte auf der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche,*) so gehört zu jedem Grössenpaare $s, -\frac{1}{s_1}$ ein Paar einander gegenüberliegender Punkte; und es besagt also die Gleichung

$$s^8 R\left(-\frac{1}{s}\right) = R_1(s),$$

dass die Punkte, für welche $R(s)$ verschwindet — denen im Falle, dass $R(s)$ vom 7. Grade ist, der Punkt ∞ zugesellt werden muss — vier Paare solcher Gegenpunkte bilden. Da nun, in Folge der geometrischen Bedeutung der Grösse s, denselben auf der Minimalfläche bestimmte singuläre Stellen entsprechen — diejenigen nämlich, durch welche drei Asymptoten-Linien gehen — so ist ihre Lage auf der Kugelfläche unabhängig sowohl von den Richtungen als von dem Durchschnittspunkt der Coordinaten-Axen. Man kann demnach die letzteren so annehmen, dass s für einen der acht Punkte $= 0$, für den gegenüberstehenden also $= \infty$ wird, und für einen dritten einen reellen, positiven Werth a erhält, welcher nicht grösser als 1 ist, und dass zugleich x_0, y_0, z_0 alle drei verschwinden. Dann wird

$$R(s) = Cs(s-a)(as+1)(s-b)(b's+1)(s-c)(c's+1),$$

wo b, c beliebige complexe Grössen und b', c' die denselben conjugirten bezeichnen, während C reell sein muss.

Unter Voraussetzung dieser Form von $R(s)$ werde nun

$$\int_\infty \frac{1-s^2}{2} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} = F_1(s),$$

$$\int_\infty i\frac{1+s^2}{2} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} = F_2(s),$$

$$\int_\infty \frac{s\,ds}{\sqrt{R(s)}} = F_3(s)$$

*) S. die angeführte Abhandlung S. 618. [S. 43—44 dieses Bandes.]

gesetzt, und

$$F_1(a) = w_1, \qquad F_2(a) = w_2, \qquad F_3(a) = w_3,$$
$$F_1\left(-\frac{1}{a}\right) = w_1', \quad F_2\left(-\frac{1}{a}\right) = w_2', \quad F_3\left(-\frac{1}{a}\right) = w_3',$$

mit der Bestimmung, dass unter $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$ simultane Werthe der drei Integrale, d. h. solche, zu denen man auf demselben Integrationswege gelangt, verstanden werden sollen. Dann erhalten die obigen Gleichungen für x, y, z die Gestalt

$$x + w_1 + w_1' = F_1(s) + F_1(s')$$
$$y + w_2 + w_2' = F_2(s) + F_2(s')$$
$$z + w_3 + w_3' = F_3(s) + F_3(s').$$

Nun ist, wenn unter sechs Veränderlichen $u_1, u_2, u_3, s, s', s''$ die Gleichungen

$$u_1 = F_1(s) + F_1(s') + F_1(s'')$$
$$u_2 = F_2(s) + F_2(s') + F_2(s'')$$
$$u_3 = F_3(s) + F_3(s') + F_3(s'')$$

angenommen werden, aus der Theorie der Abelschen Transcendenten bekannt, dass sich das Product

$$(s_0 - s)(s_0 - s')(s_0 - s''),$$

wenn s_0 irgend einer der Werthe von s ist, für welche $R(s)$ verschwindet, und

$$F_1(s_0) = w_1^0, \quad F_2(s_0) = w_2^0, \quad F_3(s_0) = w_3^0$$

gesetzt wird — wobei es gleichgültig ist, welches System simultaner Werthe dieser Integrale genommen wird — in der Form

$$\frac{\Theta^2(u_1 - w_1^0, u_2 - w_2^0, u_3 - w_3^0)}{\Theta^2(u_1, u_2, u_3)} \cdot e^{[u_1, u_2, u_3]}$$

darstellen lässt, wo $\Theta(u_1, u_2, u_3)$ eine eindeutige Function von u_1, u_2, u_3 bezeichnet, welche für alle endlichen Werthe dieser Grössen den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt, und $[u_1, u_2, u_3]$ einen linearen Ausdruck, auf den es hier nicht weiter ankommt. Hieraus ergiebt sich, dass $\Theta(u_1, u_2, u_3)$ stets gleich Null wird, wenn man

$$u_1 = F_1(s) + F_1(s')$$
$$u_2 = F_2(s) + F_2(s')$$
$$u_3 = F_3(s) + F_3(s')$$

setzt.

Denn man kann, welche Werthe auch s, s' haben mögen, die Grösse s_0 immer so wählen, dass das Product

$$(s_0-s)(s_0-s')(s_0-s'')$$

für $s''=\infty$ ebenfalls unendlich gross wird; und dann ist der Nenner des vorstehenden Bruches nothwendig gleich Null, weil u_1, u_2, u_3 stets endliche Werthe haben und deshalb der Zähler und der Exponential-Factor niemals unendlich gross werden können. Ferner ist $(0, 0, 0)$ ein System simultaner Werthe von $F_1(s'')$, $F_2(s'')$, $F_3(s'')$ für $s''=\infty$.

Übrigens lässt sich auch beweisen, dass durch die vorstehenden Formeln alle Systeme solcher Werthe von u_1, u_2, u_3, für welche $\Theta(u_1, u_2, u_3)$ verschwindet, gegeben werden.

In Folge der obigen Ausdrücke von x, y, z ist hiernach

$$\Theta(x+w_1+w_1', y+w_2+w_2', z+w_3+w_3') = 0$$

die Gleichung der in Rede stehenden Fläche.

Zur vollständigen Entwicklung derselben ist nur die Bestimmung eines Systems von Fundamental-Perioden der Integrale $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$ erforderlich, worauf ich jedoch, da der Umstand, dass die Coefficienten von $R(s)$ im Allgemeinen complexe Werthe haben, einige Auseinandersetzungen nothwendig machen würde, hier nicht wohl eingehen kann, sondern mich begnügen muss, das Schlussresultat anzugeben.

Die Gleichung der Fläche lässt sich darstellen in der Form

$$\sum_{l,m,n} (-1)^{ln+m} e^{\chi(l, m+\frac{1}{2}, n)} \cdot \sin\left(\frac{lx'}{\alpha}+\frac{(m+\frac{1}{2})y'}{\beta}+\frac{nz'}{\gamma}\right) = 0,$$

wo x', y', z' homogene lineare Functionen von x, y, z bedeuten, welche man als die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Beziehung auf ein bestimmtes, im Allgemeinen schiefwinkliges Axensystem betrachten kann;

α, β, γ positive Constanten;

l, m, n ganze Zahlen, von denen jede bei der Summation alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat, und $\chi(l, m+\frac{1}{2}, n)$ eine homogene ganze Function zweiten Grades von $l, m+\frac{1}{2}, n$ mit reellen

Coefficienten von der Beschaffenheit, dass die Function nur negative Werthe annimmt.

In dieser Gleichung giebt sich die Periodicität der Fläche unmittelbar zu erkennen. Der Raum kann durch drei Systeme äquidistanter Ebenen so in Parallelepipeda zerlegt werden, dass die Fläche durch alle hindurchgeht, und die in je zweien enthaltenen Theile derselben einander congruent und gleichliegend sind.

Da in der Function $R(s)$ sechs willkürlich anzunehmende reelle Constanten vorkommen, so scheint es, dass die Parallelepipeda jede beliebige Gestalt und Grösse erhalten können; ich habe dies indess noch nicht genau untersucht.

Schliesslich bemerke ich noch, dass Herr Schwarz in einem Nachtrage zu seiner Preisschrift die Aufgabe gelöst hat, unter der Voraussetzung, dass $\frac{1}{\varphi^2(s)}$ eine ganze Function 8^{ten} Grades sei, dieselbe auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass die zugehörige Fläche gerade Linien enthalte und sich durch eine algebraische Gleichung zwischen drei elliptischen Functionen, deren Argumente lineare Functionen der Coordinaten sind, darstellen lasse. Jede Fläche, die diesen Bedingungen genügt, gehört der hier betrachteten Gattung an, und wird erhalten, wenn man die Coefficienten der Function χ (zwischen denen bei der angenommenen Form von $R(s)$ zwei Relationen bestehen) so bestimmt, dass die vorstehende Thetafunction dreier Argumente in eine Summe von Producten dreier elliptischer Thetafunctionen, deren Argumente lineare Functionen von jenen sind, verwandelt werden kann.

ANMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung enthält gegen Ende einige unrichtige Behauptungen, es schien jedoch nicht angebracht, Änderungen vorzunehmen.

K.

EINFACHER BEWEIS EINES HERMITESCHEN SATZES.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ reelle Grössen. Unter m werde irgend eine positive ganze Zahl verstanden, und es bedeute $(m)_\nu$ die grösste in $(m\alpha_\nu + \frac{1}{2})$ enthaltene ganze Zahl, so dass

$$-\tfrac{1}{2} \leqq m\alpha_\nu - (m)_\nu < \tfrac{1}{2}, \quad 0 \leqq m\alpha_\nu - (m)_\nu + \tfrac{1}{2} < 1$$

ist für $\nu = 1, 2, \ldots n$. Man bezeichne ferner, unter r eine positive ganze Zahl, die grösser als 1 ist, verstehend, mit $(m, r)_\nu$ die grösste in $r(m\alpha_\nu - (m)_\nu + \frac{1}{2})$ enthaltene ganze Zahl, und betrachte für irgend einen bestimmten Werth von r,

$$m = 1, 2, \ldots r^n + 1$$

setzend, die $(r^n + 1)$ Werthsysteme

$$\begin{array}{lllll} (1) & (1,r)_1 & (1,r)_2 & \ldots & (1,r)_n \\ (2) & (2,r)_1 & (2,r)_2 & \ldots & (2,r)_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (r^n+1) & (r^n+1,r)_1 & (r^n+1,r)_2 & \ldots & (r^n+1,r)_n. \end{array}$$

Da jede der Zahlen $(m, r)_\nu$ einen der Werthe $0, 1, \ldots r-1$ hat, so kann es unter den vorstehenden Werthsystemen höchstens r^n von einander verschiedene geben; es müssen also mindestens zwei von ihnen identisch sein, d. h. es muss zwei verschiedene in der Reihe $1, 2, \ldots r^n + 1$ enthaltene Zahlen m', m'' geben, für welche

$$(m', r)_\nu = (m'', r)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Es sei $m'' > m'$, so hat man

$$\begin{aligned} r(m'\alpha_\nu - (m')_\nu + \tfrac{1}{2}) &= \varepsilon'_\nu + (m', r)_\nu \qquad 0 \leqq \varepsilon'_\nu < 1 \\ r(m''\alpha_\nu - (m'')_\nu + \tfrac{1}{2}) &= \varepsilon''_\nu + (m'', r)_\nu \qquad 0 \leqq \varepsilon''_\nu < 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(m''-m')\alpha_\nu-(m'')_\nu+(m')_\nu=\frac{\varepsilon''_\nu-\varepsilon'_\nu}{r}.$$

Es liegt also $(m''-m')\alpha_\nu-(m'')_\nu+(m')_\nu$ zwischen $-\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r}$, also auch zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, und es ist demnach $(m'')_\nu-(m')_\nu$ die zu $m=m''-m'$ gehörige Zahl $(m)_\nu$. Damit ist bewiesen:

Ist r eine beliebig angenommene positive ganze Zahl, grösser als 1, und bestimmt man zu jeder in der Reihe $1, 2, \ldots r^n$ enthaltenen Zahl m die zugehörigen Zahlen $(m)_\nu$, so dass

$$-\tfrac{1}{2}\leqq m\alpha_\nu-(m)_\nu<\tfrac{1}{2} \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

ist, so giebt es mindestens einen Werth von m, für welchen die Differenzen

$$m\alpha_\nu-(m)_\nu$$

sämmtlich zwischen $-\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r}$ liegen, so dass, wenn man

$$\alpha_1=\frac{(m)_1}{m}+\frac{\delta_1}{mr},\quad \alpha_2=\frac{(m)_2}{m}+\frac{\delta_2}{mr},\quad \cdots\quad \alpha_n=\frac{(m)_n}{m}+\frac{\delta_n}{mr}$$

setzt, die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind. Dabei ist $m\leqq r^n$ oder $r\geqq\sqrt[n]{m}$.

ANMERKUNG.

Der vorstehende Satz findet sich in der Abhandlung Hermites Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 77, p. 18 (Paris 1873). Ob er schon früher ausgesprochen oder bewiesen worden ist, hat sich nicht feststellen lassen. Den obigen Beweis hat Weierstrass Herrn H. A. Schwarz auf einem mit dem Vermerk Juli 1882 versehenen Blatte mitgetheilt.

K.

NEUER BEWEIS DES SATZES, DASS JEDE GANZE RATIONALE FUNCTION EINER VERÄNDERLICHEN DARGESTELLT WERDEN KANN ALS EIN PRODUCT AUS LINEAREN FUNCTIONEN DERSELBEN VERÄNDERLICHEN.*)

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 17. December 1891.)

Obgleich wir gegenwärtig von dem in Rede stehenden Fundamentaltheoreme der Algebra eine Reihe strenger Beweise besitzen, so dürfte doch die Mittheilung der nachstehenden Begründung desselben, deren Eigenthümlichkeit hauptsächlich darin besteht, dass sie ohne Heranziehung von Hülfsmitteln und Begriffen, die der Algebra fremd sind, rein arithmetisch durchgeführt wird, vielen Mathematikern nicht unwillkommen sein.

1.

Bezeichnet man, unter $x, x_1, \dots x_n$ unbestimmte Grössen verstehend, mit

$$(x_1, \dots x_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

die ganze Function von $x_1, \dots x_n$, welche in der nach Potenzen von x ausgeführten Entwickelung des Products

$$(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

*) Ich habe bereits vor Jahren (vergl. die Monatsberichte v. J. 1859, S. 758, und v. J. 1868, S. 428) der Akademie einen Beweis dieses Satzes vorgelegt, der auf demselben Grundgedanken, wie der gegenwärtig mitgetheilte, beruhte, für mich aber aus dem Grunde, dass er nicht ganz frei von Stetigkeitsbetrachtungen war, etwas Unbefriedigendes hatte und deshalb nicht veröffentlicht worden ist. [Siehe Bd. I S. 247—256 dieser Ausgabe.]

den Coefficienten von $x^{n-\nu}$ bildet, so lässt sich das Theorem, um das es sich handelt, folgendermaassen aussprechen:

Sind $C_1, \dots C_n$ irgend n gegebene Grössen, so existirt stets ein System bestimmter Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$, für welches die n Gleichungen

$$(1.) \qquad (x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

bestehen und somit, wenn

$$(2.) \qquad f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n$$

gesetzt wird, für jeden Werth von x

$$(3.) \qquad f(x) = \Pi_\nu (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

ist.

Der so formulirte Satz soll nun auf directeste Weise begründet werden durch Entwickelung eines Verfahrens, mittels dessen man, wenn $C_1, \dots C_n$ numerisch gegeben sind, n Zahlgrössen, die für $x_1, \dots x_n$ gesetzt die Gleichungen (1.) befriedigen, mit Sicherheit berechnen kann, und zwar ohne dass zuvor die Existenz solcher Grössen bewiesen zu sein braucht.

Es werde zunächst der (allgemeine) Fall betrachtet, wo die gegebene Function $f(x)$ und deren erste Derivirte keinen gemeinsamen Theiler besitzen, also die Discriminante*) von $f(x)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Das Letztere gilt dann auch für jede Function

$$(4.) \qquad \varphi(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n,$$

deren Coefficienten $(A_1, \dots A_n)$ so angenommen werden, dass jede der Differenzen

$$C_1 - A_1, \ \dots \ C_n - A_n$$

ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt. Um hierüber etwas Genaueres festzustellen, setze man

$$A_1 = C_1 - h_1, \ \dots \ A_n = C_n - h_n,$$

dann wird, wenn man die Discriminante der Function $\varphi(x)$ mit

$$\Delta(A_1, \dots A_n)$$

*) D. h. die Resultante der Functionen $f'(x), f(x)$.

bezeichnet,

$$\Delta(A_1, \dots A_n) = \Delta(C_1, \dots C_n) - \{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\}, \tag{5.}$$

wo der eingeklammerte Ausdruck dargestellt werden kann als eine Summe, in der jedes einzelne Glied ein Product aus ganzen positiven Potenzen der Grössen $h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n$ und einer (positiven oder negativen) ganzen Zahl ist. In jedem Gliede, wo diese Zahl negativ ist, verwandle man sie in die ihr entgegengesetzte positive; der Ausdruck, in den $\{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\}$ dadurch übergeht, werde mit

$$[h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n]$$

bezeichnet. Nimmt man sodann n positive Grössen $\overline{C}_1, \dots \overline{C}_n$ so an, dass die Bedingungen

$$|C_1| < \overline{C}_1, \dots |C_n| < \overline{C}_n \tag{6.}$$

erfüllt werden, und ersetzt in dem vorstehenden Ausdrucke die Grössen $C_1, \dots C_n$ beziehlich durch $\overline{C}_1, \dots \overline{C}_n$, jede der Grössen $h_1, \dots h_n$ aber durch ein und dieselbe positive Grösse h, so ist

$$|\{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\}| \text{ stets kleiner als } [h, \dots h, \overline{C}_1, \dots \overline{C}_n],$$

wenn die absoluten Beträge von $h_1, \dots h_n$ sämmtlich kleiner als h sind. Es ist aber $[h, \dots h, \overline{C}_1, \dots \overline{C}_n]$, wofür jetzt kürzer $[h]$ geschrieben werde, eine ganze Function von h mit lauter positiven Coefficienten und ohne ein von h unabhängiges Glied; man kann also eine positive Grösse h_0 so bestimmen, dass für jeden Werth von h, der die Grenze h_0 nicht übersteigt, $[h]$ kleiner ist als eine willkürlich angenommene Grösse.

Nun sei D^* irgend eine positive Grösse, die kleiner ist als der absolute Betrag der Discriminante $\Delta(C_1, \dots C_n)$, und Δ_0 eine andere, die $< D^*$; dann kann man h_0 so annehmen, dass

$$\Delta_0 + [h_0] \leqq D^* \tag{7.}$$

ist. Hieraus und aus Gleichung (5.) folgt nun

$$|\Delta(A_1, \dots A_n)| > D^* - [h_0],$$

wenn die absoluten Beträge der Differenzen $C_1 - A_1, \dots C_n - A_n$ sämmtlich

kleiner als h_0 sind. Da nun $D^* - [h_0] = \Delta_0 + (D^* - \Delta_0 - [h_0])$ und $D^* - \Delta_0 - [h_0]$ nicht negativ ist, so ergiebt sich

$$|\Delta(A_1, \dots A_n)| > \Delta_0 \tag{8.}$$

für jedes den Bedingungen

$$|C_1 - A_1| < h_0, \dots |C_n - A_n| < h_0 \tag{9.}$$

entsprechende Werthsystem $(A_1, \dots A_n)$.

Angenommen nun, man habe, nachdem ein der Bedingung (7.) genügendes Grössenpaar h_0, Δ_0 fixirt worden, ein System von n bestimmten Zahlgrössen $a_1, \dots a_n$ ermittelt, für welches, wenn

$$A_\nu = (a_1, \dots a_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{10.}$$

gesetzt wird, die Bedingungen (9.) erfüllt werden. Dann ist

$$|A_\nu| < |C_\nu| + h_0, \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

also sicher

$$|A_\nu| < \overline{C}_\nu + h_0,$$

und daher für jeden Werth der Veränderlichen x

$$\left|\Sigma_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < \Sigma_\nu \frac{\overline{C}_\nu + h_0}{|x|^\nu}.$$

Nimmt man also eine positive Grösse α so an, dass

$$\Sigma_\nu \frac{\overline{C}_\nu + h_0}{\alpha^\nu} \leqq 1, \tag{11.}$$

so hat man für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag grösser oder eben so gross als α ist,

$$\left|\Sigma_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < 1,$$

also, wenn

$$\varphi(x) = \Pi_\nu(x - a_\nu) = x^n + \Sigma_\nu A_\nu x^{n-\nu}$$

gesetzt wird,

$$|\varphi(x)| = \left|x^n \left\{1 + \Sigma_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right\}\right| > 0,$$

woraus sich

$$|a_\nu| < \alpha \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{12.}$$

ergiebt.

Man hat ferner, wenn

$$\beta = n\alpha^{n-1} + \sum_\nu (n-\nu)(\overline{C}_\nu + h_0)\,\alpha^{n-\nu-1} \tag{13.}$$

gesetzt wird,

$$|\varphi'(a_\nu)| < \beta, \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{14.}$$

woraus weiter, da

$$\frac{1}{\varphi'(a_\nu)} = \frac{\Pi_\mu \varphi'(a_\mu)}{\Delta(A_1, \dots A_n)} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

ist,

$$\left|\frac{1}{\varphi'(a_\nu)}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0} \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{15.}$$

sich ergiebt.

Man setze jetzt, unter $\xi_1, \dots \xi_n$ zu bestimmende Grössen verstehend,

$$\left\{\begin{array}{ll} a'_\nu = a_\nu + \xi_\nu, & (\nu = 1, \dots n) \\ \varphi_1(x) = \Pi_\nu(x - a'_\nu) = \Pi_\nu(x - a_\nu - \xi_\nu), & \\ \psi(x) = f(x) - \varphi(x) = \sum_\nu (C_\nu - A_\nu)\, x^{n-\nu}, & \\ \psi_1(x) = f(x) - \varphi_1(x) = \sum_\nu (C_\nu - A'_\nu)\, x^{n-\nu}, & A'_\nu = (a'_1, \dots a'_n)_\nu, \\ \Delta = \Delta(A_1, \dots A_n). & \end{array}\right. \tag{16.}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= f(x) - \varphi(x) - (\varphi_1(x) - \varphi(x)) \\ &= f(x) - \varphi(x) + \sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu + \sum_\mu [\xi_1, \dots \xi_n]_\mu\, x^{n-\mu}, \qquad (\mu = 2, \dots n) \end{aligned} \tag{17.}$$

wo $[\xi_1, \dots \xi_n]_\mu$ eine ganze Function μ^{ter} Ordnung von $\xi_1, \dots \xi_n$ bedeutet. Nimmt man nun

$$\xi_\nu = -\frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} = -\frac{\psi(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}, \quad \text{also } a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}, \tag{18.}$$

so hat man

$$f(x) - \varphi(x) + \sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu = \psi(x) - \sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x - a_\nu}\,\frac{\psi(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} = 0$$

für jeden Werth von x, und es ergiebt sich aus (17.)

$$\psi_1(x) = \sum_\mu \left[-\frac{\psi(a_1)}{\varphi'(a_1)}, \cdots -\frac{\psi(a_n)}{\varphi'(a_n)}\right]_\mu x^{n-\mu} \qquad (\mu = 2, \ldots n). \tag{19.}$$

Es ist aber nach (17.)

$$\sum_\mu [\xi_1, \ldots \xi_n]_\mu x^{n-\mu} = -\Pi_\nu(x-a_\nu-\xi_\nu) + \Pi_\nu(x-a_\nu) - \sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x-a_\nu}\xi_\nu,$$

also, da $\Delta = \Pi_\nu \varphi'(a_\nu)$,

$$\begin{aligned}\Delta\sum_\mu \left[\frac{-\psi(a_1)}{\varphi'(a_1)}, \cdots \frac{-\psi(a_n)}{\varphi'(a_n)}\right]_\mu x^{n-\mu} = &-\Pi_\nu((x-a_\nu)\varphi'(a_\nu)+\psi(a_\nu)) + \Pi_\nu((x-a_\nu)\varphi'(a_\nu)) \\ &+ (x-a_2)\ldots(x-a_n)\varphi'(a_2)\ldots\varphi'(a_n)\psi(a_1) \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ (x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})\varphi'(a_1)\ldots\varphi'(a_{n-1})\psi(a_n).\end{aligned} \tag{20.}$$

Daraus ergiebt sich, dass $\Delta\psi_1(x)$ die Gestalt

$$\Delta\psi_1(x) = \sum_\mu \{a_1, \ldots a_n;\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu x^{n-\mu} \qquad (\mu = 2, \ldots n) \tag{21.}$$

hat, wo $\{a_1, \ldots a_n;\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu$ eine ganze Function von $a_1, \ldots a_n$ und $\psi(a_1), \ldots \psi(a_n)$ bezeichnet, welche nur solche Glieder enthält, die in Beziehung auf die Grössen $\psi(a_1), \ldots \psi(a_n)$ mindestens von der zweiten Ordnung sind. Hiernach hat man

$$C_1 - A_1' = 0, \quad C_\mu - A_\mu' = \frac{1}{\Delta}\{a_1, \ldots a_n;\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu \quad (\mu = 2, \ldots n). \tag{22.}$$

Bezeichnet man nun von den absoluten Beträgen der Differenzen $C_1 - A_1, \ldots C_n - A_n$ den grössten mit δ und setzt

$$\gamma = \sum_\nu \alpha^{n-\nu}, \tag{23.}$$

so ist (nach 16.)

$$|\psi(a_\nu)| = |\sum_\nu (C_\nu - A_\nu) a_\nu^{n-\nu}| < \gamma\delta. \tag{24.}$$

Aus den Gleichungen (20.), (14.), (24.) erhellt dann, dass (für $\mu = 2, \ldots n$)

$$|\{a_1, \ldots a_n,\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu| \tag{25.}$$

kleiner ist, als der Coefficient von $x^{n-\mu}$ in der nach Potenzen von x ausgeführten Entwickelung des Ausdrucks

$$(\beta(x+\alpha)+\gamma\delta)^n - \beta^n(x+\alpha)^n - n\beta^{n-1}\gamma\delta(x+\alpha)^{n-1}.$$

Dieser Coefficient ist eine durch δ^2 theilbare ganze Function von δ mit lauter

positiven Coefficienten, die mit $\delta^2(\alpha, \beta, \gamma; \delta)_\mu$ bezeichnet werde. Aus Gleichung (22.) ergiebt sich dann, da $\Delta > \Delta_0$ ist,

$$C_1 - A_1' = 0, \quad |C_\mu - A_\mu'| < \frac{\delta^2(\alpha, \beta, \gamma; \delta)_\mu}{\Delta_0}.$$

Nun verstehe man unter d_0 eine bestimmte positive Grösse, für welche die Bedingungen

$$d_0 \leqq h_0, \quad d_0(\alpha, \beta, \gamma; d_0)_\mu \leqq \Delta_0 \qquad (\mu = 2, \ldots n) \tag{26.}$$

erfüllt werden, und unterwerfe die Grössen $a_1, \ldots a_n$ der Beschränkung, dass die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_1 - A_1, \ \ldots \ C_n - A_n$$

sämmtlich kleiner als d_0 sein sollen, so dass man

$$\delta = \varepsilon d_0$$

setzen kann, wo ε eine positive Grösse, die kleiner als 1 ist, bezeichnet. Dann ist

$$\delta^2(\alpha, \beta, \gamma; \delta)_\mu = \varepsilon^2 d_0 . d_0(\alpha, \beta, \gamma; \varepsilon d_0)_\mu < \varepsilon^2 d_0 \Delta_0,$$

und man hat daher, wenn man von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$C_1 - A_1', \ \ldots \ C_n - A_n'$$

den grössten mit

$$\varepsilon' d_0$$

bezeichnet,

$$\varepsilon' < \varepsilon^2. \tag{27.}$$

Aus dem im Vorstehenden Bewiesenen ergiebt sich nun, da die Grösse $\varepsilon' d_0$ in Bezug auf das System $(a_1', \ldots a_n')$ dieselbe Bedeutung hat, wie εd_0 in Bezug auf $(a_1, \ldots a_n)$, ohne Weiteres Folgendes: Angenommen es sei ein den Bedingungen

$$|C_\nu - (a_1, \ldots a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n) \tag{28.}$$

entsprechendes System von Zahlgrössen $a_1, \ldots a_n$ gegeben, und es werde aus demselben nach dem in den nachstehenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze eine Reihe anderer Systeme

$$(a_1', \ldots a_n'), \ (a_1'', \ldots a_n''), \ (a_1''', \ldots a_n''') \text{ u. s. w.}$$

abgeleitet:

$$(29.)\qquad \left\{\begin{aligned} a_\nu' &= a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\Pi_\mu(a_\nu - a_\mu)},\\ a_\nu'' &= a_\nu' - \frac{f(a_\nu')}{\Pi_\mu(a_\nu' - a_\mu')},\\ a_\nu''' &= a_\nu'' - \frac{f(a_\nu'')}{\Pi_\mu(a_\nu'' - a_\mu'')},\\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, \dots n;\ \mu \gtrless \nu).$$

Die so definirten Grössen

$$a_\nu^{(\lambda)} \qquad (\nu = 1, \dots n;\ \lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

haben dann sämmtlich bestimmte endliche Werthe, und es ist, wenn man für jeden bestimmten Index λ

$$(30.)\qquad A_\nu^{(\lambda)} = (a_1^{(\lambda)}, \dots a_n^{(\lambda)})_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

setzt und von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$C_1 - A_1^{(\lambda)}, \ \dots\ C_n - A_n^{(\lambda)}$$

den grössten mit $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$ bezeichnet,

$$(31.)\qquad \varepsilon' < \varepsilon\varepsilon,\ \varepsilon'' < \varepsilon'\varepsilon' < \varepsilon^4,\ \varepsilon''' < \varepsilon''\varepsilon'' < \varepsilon^8,\ \dots,$$

also allgemein

$$(32.)\qquad \varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \dots).$$

Setzt man nun

$$(33.)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_\lambda(x) &= \Pi_\nu(x - a_\nu^{(\lambda)}),\\ \psi_\lambda(x) &= f(x) - \varphi_\lambda(x) = \textstyle\sum_\nu (C_\nu - A_\nu^{(\lambda)}) x^{n-\nu}, \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

so ist

$$(34.)\qquad |f(a_\nu^{(\lambda)})| = |\psi_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})| < \gamma d_0 \varepsilon^{(\lambda)},$$

wobei zu bemerken, dass jede der Grössen $a_\nu^{(\lambda)}$, ebenso wie $a_1, \dots a_n$, ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als die oben mit α bezeichnete Grösse. Man hat ferner, wenn $\Delta^{(\lambda)}$ die Discriminante der Function $\varphi_\lambda(x)$ bedeutet,

$$(35.)\qquad \frac{1}{\varphi_\lambda'(a_\nu^{(\lambda)})} = \frac{1}{\Delta^{(\lambda)}} \cdot \Pi_\mu \varphi_\lambda'(a_\mu^{(\lambda)}) \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

und somit, da $|\Delta^{(\lambda)}| > \Delta_0$ und nach (14.) $|\varphi_\lambda'(a_\mu^{(\lambda)})| < \beta$ ist,

$$(36.)\qquad \left|\frac{1}{\varphi_\lambda'(a_\nu^{(\lambda)})}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0}, \qquad \left|-\frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\varphi_\lambda'(a_\nu^{(\lambda)})}\right| < \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} \cdot (\varepsilon)^{2^\lambda}.$$

Hiernach sind, wenn man

$$x_\nu = a_\nu - \sum_0^\infty{}_\lambda \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\varphi_\lambda'(a_\nu^{(\lambda)})} \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{37.}$$

setzt, $x_1, \dots x_n$ wohldefinirte endliche Zahlgrössen, indem jedes Glied der Reihe, durch welche sie dargestellt sind, seinem absoluten Betrage nach kleiner ist, als das entsprechende Glied der Summe

$$\sum_0^\infty{}_\lambda \frac{\gamma\beta^{n-1}d_0}{\Delta_0}(\varepsilon)^{2^\lambda},$$

welche einen endlichen Werth hat. Man hat aber, wenn r irgend eine der Zahlen 1, 2, ... bedeutet, nach (29.)

$$a_\nu^{(r)} = a_\nu - \sum_0^{r-1}{}_\lambda \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\varphi_\lambda'(a_\nu^{(\lambda)})}, \tag{38.}$$

also

$$|x_\nu - a_\nu^{(r)}| < \frac{\gamma\beta^{n-1}d_0}{\Delta_0} \sum_r^\infty{}_\lambda (\varepsilon)^{2^\lambda}, \tag{39.}$$

und es werden demnach die absoluten Beträge der Differenzen

$$x_\nu - a_\nu^{(r)}$$

sämmtlich kleiner als eine beliebig angenommene Grösse, sobald r eine bestimmte Grenze überschreitet. Dasselbe gilt dann aber auch von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$(x_1, \dots x_n)_\nu - A_\nu^{(r)}, \quad C_\nu - A_\nu^{(r)},$$

woraus sich, da

$$|(x_1, \dots x_n)_\nu - C_\nu| \leqq |(x_1, \dots x_n)_\nu - A_\nu^{(r)}| + |A_\nu^{(r)} - C_\nu|$$

ist, und $(x_1, \dots x_n)_\nu - C_\nu$ einen von r unabhängigen Werth hat,

$$(x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu, \tag{40.}$$

$$f(x) = \Pi_\nu(x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{41.}$$

ergiebt.

Es lässt sich also in der That jede Function $f(x)$ von der vorausgesetzten Beschaffenheit als ein Product aus ganzen linearen Functionen der Veränderlichen x darstellen, wofern man ein den oben angegebenen Bedingungen ent-

sprechendes Grössensystem $(a_1, \dots a_n)$ ermitteln kann. Dies ist aber stets möglich, wie nun gezeigt werden soll.

2.

Zunächst sind zwei Hülfssätze zu beweisen.

Es seien $f_0(x), f_1(x)$ zwei Functionen der Veränderlichen x von derselben Form und Beschaffenheit wie die im Vorhergehenden mit $f(x)$ bezeichnete:

$$(1.) \qquad \begin{cases} f_0(x) = x^n + \sum_\nu C_\nu^{(0)} x^{n-\nu}, \\ f_1(x) = x^n + \sum_\nu C_\nu^{(1)} x^{n-\nu}. \end{cases}$$

Setzt man dann, unter z einen veränderlichen Parameter verstehend,

$$(2.) \qquad f(x; z) = (1-z) f_0(x) + z f_1(x),$$

so hat $f(x; z)$, als Function von x betrachtet, eine Discriminante $D(z)$, welche eine ganze Function von z ist und der Annahme nach sowohl für $z = 0$ als für $z = 1$ einen von Null verschiedenen Werth hat, also sicher nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Grösse z verschwindet. Setzt man nun, unter s, t reelle Veränderliche verstehend,

$$(3.) \qquad z = \frac{1+si}{t+si},$$

so entspricht jedem Werthe von z, mit Ausnahme der Werthe, welche auf dem Umfang desjenigen Kreises liegen, der die Strecke $(0 \dots 1)$ zum Durchmesser hat, ein Paar endlicher Werthe (s, t). Für $z = 1$ ist $t = 1$ und s unbestimmt, während keinem der übrigen auf dem Umfang des erwähnten Kreises liegenden Werthe von z ein Paar endlicher Werthe von s und t entspricht. Es kann daher nur eine endliche Anzahl von Paaren endlicher Werthe (s, t) geben, für die

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right)$$

gleich Null wird. Giebt man also der Grösse s irgend einen bestimmten, in keinem dieser Paare vorkommenden Werth k, so ist

$$D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$$

eine Function von t, die für keinen (reellen) Werth dieser Veränderlichen verschwindet. Es handelt sich nun darum, ein Verfahren

anzugeben, durch das man einen der gestellten Bedingung entsprechenden Werth k wirklich bestimmen kann, ohne von den Werthen der Grösse z, für die $D(z)$ verschwindet, irgend welche Kenntniss zu haben.

Man bringe $D(z)$ auf die Form

$$D(z) = \sum_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i) z^{m-\mu}, \qquad (\mu = 0, \dots m) \tag{4.}$$

wo m den Grad der Function bezeichnet und unter α_μ, β_μ reelle Constanten zu verstehen sind. Dann hat man

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{1}{(t+si)^m} \cdot \sum_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)(1+si)^{m-\mu}(t+si)^\mu \qquad (\mu = 0, \dots m)$$

und kann also setzen

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{G(t,s) + iH(t,s)}{(t+si)^m}, \tag{5.}$$

wo $G(t,s)$, $H(t,s)$ ganze Functionen von t, s bezeichnen. Giebt man nun der Grösse s irgend einen bestimmten endlichen Werth k, so kann die Function $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ nur in dem Falle verschwinden, wo für einen bestimmten (ebenfalls endlichen) Werth von t die Functionen $G(t,k)$, $H(t,k)$ beide verschwinden. Denn es ist $G(t,k)+iH(t,k)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von t, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes, nämlich $\alpha_m + \beta_m i = D(0)$, einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und man hat daher, wenn unter $\overline{D}$ irgend eine bestimmte positive Grösse, die kleiner als $|D(0)|$ ist, verstanden wird,

$$\left| D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right) \right| > \overline{D}$$

für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze (t_0) überschreitet. Für die übrigen Werthe von t ist aber $\frac{1}{t+ki}$ dem absoluten Betrage nach niemals kleiner als $\frac{1}{t_0+ki}$; es kann also $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ nur dann verschwinden, wenn es in dem Intervall $(-t_0, \dots t_0)$ Werthe von t giebt, für welche $G(t,k)$, $H(t,k)$ beide gleich Null sind. In diesem Falle ist aber die aus den Gleichungen

$$G(t,s) = 0, \qquad H(t,s) = 0 \tag{6.}$$

durch Elimination der Grösse t hervorgehende Resultante, welche eine ganze Function von s ist und mit $R(s)$ bezeichnet werden soll, für $s = k$ nothwendig

gleich Null. Hiernach braucht man, unter der Voraussetzung, dass $R(s)$ nicht identisch gleich Null sei, bei der Wahl der Constante k nur diejenigen Werthe, für welche $R(k) = 0$ ist, auszuschliessen, dann ist

$$D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$$

stets eine Function von t, die für keinen (reellen) Werth dieser Veränderlichen verschwindet, wie auch der Werth von k angenommen werden möge.

Es lässt sich aber zeigen, dass die in Betreff der Function $R(s)$ gemachte Voraussetzung stets zutrifft, wozu zwei Bedingungen hinreichen: dass die Coefficienten von t^m in $G(t,s)$ und $H(t,s)$ nicht beide gleich Null sind, und dass diese Functionen nicht für jeden Werth von s einen gemeinsamen Theiler haben.

Man bezeichne die aus den Gleichungen (6.) durch Elimination der Grösse s hervorgehende Resultante, welche eine ganze Function von t ist, mit $R_1(t)$. Von derselben ist leicht zu zeigen, dass sie nicht identisch verschwindet.

Nach (5.) hat man, wenn

$$(7.) \qquad i^m \sum_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i) = \alpha + \beta i, \quad (-i)^m \sum_\mu (\alpha_\mu - \beta_\mu i) = \alpha - \beta i$$

gesetzt wird,

$$(8.) \qquad \begin{cases} G(t,s) = \alpha s^m + \mathfrak{G}_1(t)\, s^{m-1} + \cdots + \mathfrak{G}_m(t), \\ H(t,s) = \beta s^m + \mathfrak{H}_1(t)\, s^{m-1} + \cdots + \mathfrak{H}_m(t), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{H}_1(t)$ u. s. w. ganze Functionen von t bedeuten. Da $\alpha + \beta i = i^m D(1)$ so sind α, β niemals beide gleich Null, und es könnte daher $R_1(t)$ nur dann identisch gleich Null sein, wenn $G(t,s)$, $H(t,s)$, als Functionen von s betrachtet, für jeden Werth von t einen gemeinsamen Theiler besässen. Nun ist aber für $t = 1$

$$(9.) \qquad \begin{cases} G(1,s) + iH(1,s) = (\alpha + \beta i)(s-i)^m, \\ G(1,s) - iH(1,s) = (\alpha - \beta i)(s+i)^m, \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen erhellt unmittelbar, dass $G(1,s)$, $H(1,s)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Folglich ist $R_1(t)$ für $t = 1$ nicht gleich Null und verschwindet also niemals identisch.

Hieraus folgt nun weiter, das sich zwei ganze Functionen von t, s

$$G_1(t,s),\ H_1(t,s)$$

bestimmen lassen, welche die Gleichung

$$G_1(t,s)\,G(t,s)+H_1(t,s)\,H(t,s)=R_1(t) \tag{10.}$$

befriedigen. Aus dieser Gleichung kann nun gefolgert werden, dass $G(t,s)$, $H(t,s)$, als Functionen von t betrachtet, nicht für jeden Werth von s einen gemeinsamen Theiler besitzen.

Existirt nämlich für einen bestimmten Werth von s ein gemeinsamer Theiler von $G(t,s)$, $H(t,s)$, so ist er auch ein gemeinsamer Theiler der Functionen

$$R_1(t) \text{ und } G(t,s)+iH(t,s)=\sum_\mu(\mathfrak{G}_\mu(t)+i\mathfrak{H}_\mu(t))\,s^{m-\mu},$$

wo man $\mathfrak{G}_0(t)=\alpha$, $\mathfrak{H}_0(t)=\beta$ zu nehmen hat. Nun kann aber $G(t,s)+iH(t,s)$ nicht für jeden Werth von s mit der von s unabhängigen Function $R_1(t)$ einen Theiler gemein haben; denn dazu wäre nach einem bekannten Satze zunächst erforderlich, dass ein gemeinsamer Theiler sämmtlicher Functionen $\mathfrak{G}_\mu(t)+i\mathfrak{H}_\mu(t)$ existirte, was nicht der Fall ist, wie schon daraus erhellt, dass $\mathfrak{G}_0(t)+i\mathfrak{H}_0(t)$ eine von Null verschiedene Constante ist.

Zieht man nun noch in Betracht, dass in dem Ausdrucke

$$G(t,s)+iH(t,s)$$

der von s unabhängige Coefficient von t^m, nämlich $\alpha_m+\beta_m i$, einen von Null verschiedenen Werth hat, in $G(t,s)$, $H(t,s)$ also die Coefficienten von t^m niemals beide gleich Null sind, so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass unter den gemachten Voraussetzungen $R(s)$ in der That niemals identisch verschwindet. Man braucht also, um eine Function $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ von der verlangten Beschaffenheit zu erhalten, die Constante k nur so zu wählen, dass $R(k)$ nicht gleich Null ist.

Nach Fixirung eines solchen Werthes von k lässt sich nun auch auf mannigfaltige Weise eine positive Grösse bestimmen, welche kleiner ist als jeder Werth, den der absolute Betrag von $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ annehmen kann. Für das Folgende genügt es aber, eine Grösse zu ermitteln, die für jeden dem Intervall $(1\cdots+\infty)$ angehörigen Werth von t der angegebenen Bedingung genügt.

Man bilde, was immer möglich ist, zwei ganze Functionen von t, k

$$G_2(t,k),\ H_2(t,k),$$

welche der Gleichung

$$G_2(t,k)\,G(t,k) + H_2(t,k)\,H(t,k) = t^{2m-1}R(k) \tag{11.}$$

genügen und in Beziehung auf t von nicht höherem als dem $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade sind. Setzt man dann

$$\left\{\begin{array}{ll} & t = \frac{1}{\tau}, \\ G(t,k) = \tau^{-m}\varphi(\tau,k), & H(t,k) = \tau^{-m}\psi(\tau,k), \\ G_2(t,k) = \tau^{-m+1}\varphi_1(\tau,k), & H_2(t,k) = \tau^{-m+1}\psi_1(\tau,k), \end{array}\right. \tag{12.}$$

so bedeutet τ eine reelle Veränderliche, die jeden dem Intervall $(0 \ldots 1)$ angehörigen Werth annehmen kann, und

$$\varphi(\tau,k),\ \psi(\tau,k),\ \varphi_1(\tau,k),\ \psi_1(\tau,k)$$

sind ganze Functionen von τ, welche der Gleichung

$$\varphi_1(\tau,k)\,\varphi(\tau,k) + \psi_1(\tau,k)\,\psi(\tau,k) = R(k) \tag{13.}$$

genügen. Dann hat man

$$D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right) = \frac{\varphi(\tau,k) + i\psi(\tau,k)}{(1+k\tau i)^m}, \tag{14.}$$

und es folgt, da

$$(\varphi_1^2(\tau,k) + \psi_1^2(\tau,k))\,(\varphi^2(\tau,k) + \psi^2(\tau,k)) \geqq (\varphi_1(\tau,k)\,\varphi(\tau,k) + \psi_1(\tau,k)\,\psi(\tau, \tag{15.}$$

ist,

$$\left|D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)\right|^2 \geqq \frac{R^2(k)}{(1+k^2\tau^2)^m\,.\,(\varphi_1^2(\tau,k) + \psi_1^2(\tau,k))}. \tag{16.}$$

Bestimmt man also, was ohne Schwierigkeit geschehen kann, eine positive Grösse K so, dass für jeden der betrachteten Werthe von τ

$$K > \varphi_1^2(\tau,k) + \psi_1^2(\tau,k), \tag{17.}$$

so ergiebt sich

$$\left|D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)\right|^2 > \frac{R^2(k)}{(1+k^2)^m K}. \tag{18.}$$

Hiernach ist also $f\left(x; \frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)$, wofür fortan kürzer $f(x;\tau)$ geschrieben werden soll, eine Function von x, deren Discriminante für jeden dem Intervalle $(0 \ldots 1)$ angehörigen Werth von τ ihrem absoluten Betrage nach grösser ist als eine angebbare positive Grösse.

Eine solche Grösse — sie möge mit D^* bezeichnet werden — lässt sich mit Sicherheit bestimmen, wenn sämmtliche Coefficienten der Functionen $f_0(x), f_1(x)$, wie von jetzt ab angenommen werden soll, reelle oder complexe rationale Grössen sind.

Ferner kann man dann, wenn

$$f(x;\tau) = x^n + \sum_\nu C_\nu^{(\tau)} x^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots n) \tag{19.}$$

gesetzt wird, wo

$$C_\nu^{(\tau)} = \frac{(1-\tau)C_\nu^{(0)} + (1+ki)\tau C_\nu^{(1)}}{1+k\tau i}, \tag{20.}$$

mit Leichtigkeit n positive rationale Grössen $\overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n$ ermitteln, welche für jeden der in Betracht kommenden Werthe von τ den Bedingungen

$$\overline{C}_1 > |C_1^{(\tau)}|, \ \ldots \ \overline{C}_n > |C_n^{(\tau)}| \tag{21.}$$

genügen. Bildet man dann für unbestimmte Werthe von $C_1, \ldots C_n$ und $h_1, \ldots h_n$ die im § 1 mit

$$\{h_1, \ldots h_n, C_1, \ldots C_n\}, \ [h_1, \ldots h_n, C_1, \ldots C_n]$$

bezeichneten Ausdrücke und setzt, unter h wie a. a. O. eine positive Veränderliche verstehend,

$$[h, \ldots h, \overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n] = [h],$$

so ist jetzt für jeden Werth von τ

$$|\{h_1, \ldots h_n, C_1^{(\tau)}, \ldots C_n^{(\tau)}\}| < [h],$$

wenn die absoluten Beträge von $h_1, \ldots h_n$ sämmtlich kleiner als h sind. Nimmt man also zwei bestimmte positive Grössen Δ_0, h_0 der Bedingung

$$\Delta_0 + [h_0] \leqq D^*$$

entsprechend an und versteht unter

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ d_0$$

die im § 1 ebenso bezeichneten Grössen, wobei zu beachten ist, dass die letzteren nur von $\Delta_0, h_0, \overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n$, nicht aber von den Werthen der bloss den Bedingungen

$$\overline{C}_1 > |C_1|, \ \ldots \ \overline{C}_n > |C_n|$$

unterworfenen Coefficienten der Function $f(x)$ abhangen, so ist ohne Weiteres klar, dass die jetzt definirte Grösse d_0 für jede Function $f(x;\tau)$ dieselbe Bedeutung hat, wie im § 1 die dort ebenso bezeichnete für $f(x)$. Wenn also für irgend einen bestimmten Werth von τ sich ein den Bedingungen

$$|C_\nu^{(\tau)} - (a_1, \ldots a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

genügendes Grössensystem $(a_1, \ldots a_n)$ finden lässt, so kann aus demselben mittels der Formeln (§ 1, Nr. 29), in denen dann $f(x) = f(x;\tau)$ zu nehmen ist, ein anderes $(\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_n)$ abgeleitet werden, für welches die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_\nu^{(\tau)} - (\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

sämmtlich kleiner sind als eine willkürlich angenommene, noch so kleine Grösse.

3.

Nach Begründung der beiden vorstehenden Hülfssätze lässt sich nunmehr das am Schlusse des § 1 Behauptete folgendermaassen beweisen.

Man nehme n von einander verschiedene rationale Grössen $a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ willkürlich an und setze

$$(1.) \qquad f_0(x) = \Pi_\nu(x - a_\nu^{(0)}) = x^n + \textstyle\sum_\nu C_\nu^{(0)} x^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots n).$$

Ferner sei, wie im Vorhergehenden,

$$(2.) \qquad f_1(x) = x^n + \textstyle\sum_\nu C_\nu^{(1)} x^{n-\nu}, \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

unter der Annahme, dass jeder der Coefficienten $C_\nu^{(1)}$ eine rationale Grösse sei und die Discriminante der Function einen von Null verschiedenen Werth habe.

Giebt man sodann, mit g eine ganze positive Zahl bezeichnend, der Grösse τ die Werthe

$$0, \frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots \frac{g-1}{g}, 1,$$

so ist leicht zu zeigen, dass man, vorausgesetzt, es sei g hinlänglich gross angenommen, g Systeme von je n rationalen Grössen

$$(a_{1,1}, \dots a_{1,n}),\ (a_{2,1}, \dots a_{2,n}),\ \dots\ (a_{g,1}, \dots a_{g,n})$$

berechnen kann, für welche, wenn man die Bezeichnung des vorhergehenden Paragraphen beibehält, die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda,1}, \dots a_{\lambda,n})_\nu \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, \dots g\\ \nu = 1, \dots n\end{pmatrix} \tag{3.}$$

sämmtlich kleiner als d_0 sind.

Man hat nämlich nach Formel (20.) des vorhergehenden Paragraphen

$$C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} = \frac{1+ki}{g\left(1+\frac{(\lambda+1)ki}{g}\right)\left(1+\frac{\lambda ki}{g}\right)}(C_\nu^{(1)} - C_\nu^{(0)}); \quad \begin{pmatrix}\lambda = 0, \dots g-1\\ \nu = 1, \dots n\end{pmatrix}$$

nimmt man also g so gross an, dass

$$|(1+ki)(C_\nu^{(1)} - C_\nu^{(0)})| < g d_0 \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{4.}$$

ist, so hat man

$$\left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}\right| < d_0 \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, \dots g-1\\ \nu = 1, \dots n\end{pmatrix}. \tag{5.}$$

Daraus lässt sich nun das Behauptete leicht folgern.

Da

$$f(x; 0) = f_0(x) = \Pi_\nu(x - a_\nu^{(0)}), \quad C_\nu^{(0)} = (a_1^{(0)}, \dots a_n^{(0)})_\nu, \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{6.}$$

so werden zunächst die Bedingungen

$$\left|C_\nu^{\left(\frac{1}{g}\right)} - (a_{1,1}, \dots a_{1,n})_\nu\right| < d_0 \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{7.}$$

erfüllt, wenn man

$$a_{1,1} = a_1^{(0)}, \ \dots\ a_{1,n} = a_n^{(0)} \tag{8.}$$

setzt. Angenommen nun, es sei für irgend einen bestimmten, zwischen 0 und g liegenden Werth von λ ein den Bedingungen

$$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda,1}, \dots a_{\lambda,n})_\nu < d_0 \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{9.}$$

genügendes System rationaler Grössen

$$a_{\lambda,1}, \ \dots \ a_{\lambda,n}$$

gefunden worden, so führt das oben (§ 1, Nr. 29) beschriebene Verfahren, wenn man in den dortigen Formeln

$$f\left(x; \frac{\lambda}{g}\right) \text{ für } f(x) \text{ und } a_{\lambda,1}, \dots a_{\lambda,n} \text{ für } a_1, \dots a_n$$

setzt, nothwendig zu einem neuen System rationaler Grössen

$$a_{\lambda+1,1}, \ \dots \ a_{\lambda+1,n},$$

für welches die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \dots a_{\lambda+1,n})_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{10.}$$

sämmtlich kleiner sind als eine beliebig angenommene, noch so kleine Grösse $\bar{\delta}$. Dann hat man

$$\begin{aligned} \left| C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \dots a_{\lambda+1,n})_\nu \right| &= \left| C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} + \left(C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \dots a_{\lambda+1,n})_\nu \right) \right| \\ &< \left| C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} \right| + \bar{\delta}, \qquad (\nu = 1, \dots n) \end{aligned} \tag{11.}$$

also nach (5.) für einen hinlänglich kleinen Werth von $\bar{\delta}$ auch

$$\left| C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \dots a_{\lambda+1,n})_\nu \right| < d_0 \qquad (\nu = 1, \dots n). \tag{12.}$$

Damit ist, wenn man $\lambda = 1, 2, \dots g-1$ setzt, das am Schlusse des § 1 Behauptete zunächst für den Fall, wo die Coefficienten der Function $f(x)$ sämmtlich rationale Grössen sind, so dass man $f_1(x) = f(x)$ nehmen kann, bewiesen und zugleich ein Weg gezeigt, auf dem man durch eine endliche Anzahl arithmetischer Operationen mit Sicherheit zu einem System von n rationalen Grössen

$$\bar{a}_1 = a_{g,1}, \ \dots \ \bar{a}_n = a_{g,n}$$

gelangen kann, für welches die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_1 - (\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n)_1, \ \dots \ C_n - (\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n)_n$$

sämmtlich kleiner als d_0 sind.

In dem Falle, wo die Coefficienten der Function $f(x)$ beliebige Zahlgrössen sind, kann man immer eine Function $f_1(x)$ mit lauter rationalen Coefficienten ermitteln, von denen ein jeder von dem gleichstelligen der Function $f(x)$ so wenig abweicht, als man will; es ist also stets möglich, mittels einer endlichen Anzahl arithmetischer Operationen ein den Bedingungen

$$|C_\nu - (\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{13.}$$

entsprechendes System rationaler Grössen $\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n$ zu berechnen.

Von einem solchen System ausgehend kann man nun mittels des im § 1 beschriebenen Verfahrens zu einem System wohldefinirter Grössen $x_1, \dots x_n$ gelangen, für das die Gleichungen

$$(x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{14.}$$

bestehen und somit

$$f(x) = \Pi_\nu (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots n) \tag{15.}$$

ist.

Damit ist zunächst unter der Bedingung, dass die Discriminante der gegebenen Function $f(x)$ nicht gleich Null sei, das oben (im Anfange des § 1) ausgesprochene Theorem bewiesen.

Wenn aber die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, so lässt sich $f(x)$ mittels rationaler Operationen umwandeln in ein Product aus mehreren anderen ganzen Functionen derselben Veränderlichen, von denen jede einzelne eine von Null verschiedene Discriminante besitzt, also als Product ganzer linearer Functionen von x darstellbar ist. Das in Rede stehende Theorem ist demnach allgemein gültig.

Am Schlusse des Abdruckes in dem Sitzungsbericht der Akademie vom 17. December 1891 findet sich die Anmerkung:

„Einige Zusätze und Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung werden in einer folgenden Notiz ihren Platz finden."

Eine solche Veröffentlichung ist jedoch nicht erfolgt.

K.

ZUR DETERMINANTENTHEORIE.

1.

Die folgende Mittheilung bezweckt, von den eigenthümlichen arithmetischen Gebilden, die man Determinanten nennt, eine Definition zu geben, die in vielen Fällen von Nutzen ist, und diese Definition zum Beweise einiger Sätze der Determinantentheorie zu verwenden.

Man ist auf die Determinanten gekommen bei der Auflösung linearer Gleichungen mit unbestimmten Coefficienten. Die Unbekannten ergeben sich dabei als Quotienten mit einem und demselben Nenner, und die Betrachtung dieses Nenners führte auf die eigenthümliche Zusammensetzungsweise der Determinanten.

Sind, zunächst für drei Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten x, y, z, die Coefficienten der Unbekannten in der ersten, zweiten und dritten Gleichung der Reihe nach a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', so findet man durch Ausrechnung als gemeinschaftlichen Nenner von x, y, z:

$$A = ab'c'' - ac'b'' + bc'a'' - ba'c'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Die neun Grössen $a, b, \ldots c''$, aus denen A gebildet ist, und die als die Elemente von A bezeichnet werden, sind in drei Zeilen von je drei Elementen vertheilt, und der Ausdruck A ist nur dann bestimmt, wenn einmal die Reihenfolge der Zeilen, und zweitens die Anordnung der Elemente in jeder Zeile gegeben ist. Dann bemerkt man, 1) dass der Ausdruck A eine ganze lineare homogene Function der Elemente jeder Zeile ist; 2) dass wenn man

die entsprechenden Elemente zweier Zeilen sämmtlich vertauscht, A dem absoluten Betrage nach ungeändert bleibt, aber sein Vorzeichen wechselt; 3) dass wenn das erste Element der ersten, das zweite der zweiten, das dritte der dritten Zeile gleich 1, alle anderen Elemente gleich 0 gesetzt werden, $A = 1$ ist.

Diese Eigenschaften wollen wir unter der Annahme verallgemeinern, dass n^2 Grössen, in n Zeilen geordnet, gegeben sind. Dabei muss erstens die Reihenfolge der Zeilen bestimmt sein, und zweitens die Anordnung der Elemente in jeder Zeile. Um eine möglichst kurze Bezeichnung anzuwenden, benutzt man Doppelindices und bezeichnet also mit $a_{\alpha\beta}$ das β^{te} Element der α^{ten} Zeile.

Ausgehend von dem obigen speciellen Falle, wird man sich die Aufgabe stellen können, eine Function A der Grössen $a_{\alpha\beta}$ zu bilden, welche folgende Eigenschaften hat:

1) A soll in Bezug auf die Elemente jeder Zeile eine ganze lineare homogene Function sein;
2) A soll nur das Vorzeichen ändern, wenn man zwei Zeilen mit einander vertauscht;
3) wenn $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ und alle anderen Elemente gleich 0 gesetzt werden, so soll A den Werth 1 annehmen.

Ehe wir nun nachweisen, dass die Function A durch diese drei Eigenschaften eindeutig bestimmt und mit der gewöhnlich als Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ bezeichneten Function identisch ist, wollen wir zeigen, dass die zweite Eigenschaft in Verbindung mit der ersten vollständig durch die Festsetzung vertreten werden kann, dass A verschwinden soll, wenn irgend zwei Zeilen übereinstimmen.

Aus 1) folgt nämlich, dass A in Bezug auf die Elemente zweier Zeilen eine bilineare Form ist. Bezeichnen wir also mit x_α die Elemente irgend einer Zeile, mit y_β die einer anderen, so können wir schreiben

$$A = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

und nach der eben gemachten Voraussetzung soll die Gleichung

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$$

identisch erfüllt sein. Daraus folgt, dass die Coefficienten der Potenzen und

Producte der Grössen x_α gleich Null sind, also

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$
$$A_{\beta\alpha} = -A_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n).$$

Vertauscht man nun x_α mit y_α $(\alpha = 1, 2, \dots n)$, so geht A über in

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\beta y_\alpha$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\beta\alpha} x_\alpha y_\beta.$$

Dies ist aber nach dem Obigen gleich

$$-\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = -A,$$

und somit ist gezeigt, dass die zweite Eigenschaft erfüllt ist, wenn die Festsetzung gilt, dass A verschwindet, falls zwei Zeilen übereinstimmen. Dass aber umgekehrt das Letztere eine Folge der Eigenschaft 2) ist, erhellt unmittelbar.

Aus den oben genannten drei Eigenschaften lässt sich nun das Bildungsgesetz der Function A in folgender Weise herleiten. Aus 1) ergiebt sich, dass A die Gestalt haben muss:

$$A = A_1 a_{11} + A_2 a_{12} + \cdots + A_n a_{1n},$$

wo $A_1, A_2, \dots A_n$ Grössen bezeichnen, die nur von den Elementen der $(n-1)$ letzten Zeilen abhängen. Wählt man nun $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$, so folgt, da A eine lineare homogene Function von $a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}$ sein soll, dass A_1 auch eine solche Function ist, und ebenso $A_2, \dots A_n$. Wir können daher setzen

$$A = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} a_{1\alpha} a_{2\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n).$$

Durch einen analogen Schluss leitet man ab, dass die Grössen $A_{\alpha\beta}$ ganze lineare homogene Functionen der Elemente $a_{31}, a_{32}, \dots a_{3n}$ der dritten Zeile sind, u. s. f. Schliesslich findet man

$$(1.) \qquad A = \sum [\alpha, \beta, \dots \nu] a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu},$$

wo $\alpha, \beta, \ldots \nu$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ bedeuten und $[\alpha, \beta, \ldots \nu]$ ein Ausdruck ist, der von den Elementen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ nicht mehr abhängt. Zu bemerken ist dabei, dass die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ sämmtlich oder zum Theil einander gleich sein können. Wie man sieht, ist der durch die Formel (1.) bestimmte Ausdruck der allgemeinste, der der Bedingung 1) genügt, eine lineare homogene Function der Elemente jeder Zeile zu sein, und anderseits genügt auch jeder Ausdruck von der Form (1.) der genannten Bedingung.

Um nun die Eigenschaft 2) zu benutzen, vertauschen wir die erste Zeile mit der zweiten; dann geht A über in

$$A' = \sum [\alpha, \beta, \ldots \nu] a_{2\alpha} a_{1\beta} \ldots a_{n\nu},$$

oder, wie wir schreiben können,

$$A' = \sum [\beta, \alpha, \ldots \nu] a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}.$$

Da $A' = -A$ sein soll, und die Elemente $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ von einander unabhängig sind, so folgt vermöge der Gleichung (1.)

$$(2.) \qquad [\alpha, \beta, \ldots \nu] = -[\beta, \alpha, \ldots \nu];$$

und allgemein ergiebt sich, dass der Factor $[\alpha, \beta, \ldots \nu]$ nur sein Zeichen ändert, wenn zwei der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ unter einander vertauscht werden. Daher ist insbesondere dieser Factor gleich Null, wenn von den Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ zwei einander gleich sind. Diejenigen Glieder, bei denen dies der Fall ist, sind also von vornherein in der Entwickelung von A fortzulassen; wir schreiben daher

$$A = \sum' [\alpha, \beta, \ldots \nu] a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu},$$

wo der dem Summenzeichen angehängte Strich bedeuten soll, dass nur über solche Werthsysteme $(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ zu summiren ist, bei denen nicht zwei Zahlen einander gleich sind.

Um nun die Natur des Ausdruckes A noch näher zu erkennen, betrachten wir das Product

$$P = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \ldots (\nu - \alpha)(\gamma - \beta)(\delta - \beta) \ldots (\nu - \beta) \ldots (\nu - \mu),$$

welches ohne Rücksicht auf das Vorzeichen alle Differenzen der Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ enthält, und zwar jede nur einmal.

Dieses Product ist nur dann gleich Null, wenn zwei der Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ einander gleich sind, ein Fall, den wir jedoch hier nicht zu berücksichtigen brauchen, da er bei der Bildungsweise des Ausdrucks A nicht in Betracht kommt. Es ergiebt sich ferner, dass P nur sein Zeichen ändert, wenn zwei der Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ vertauscht werden, woraus folgt, dass wenn überhaupt $\alpha, \beta, \ldots \nu$ in eine andere Anordnung gebracht werden, P höchstens sein Vorzeichen wechseln kann.

Nehmen wir nun die Ordnung der Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ so an, dass $\alpha = 1$, $\beta = 2, \ldots \nu = n$ ist, so erhält P den Werth

$$P_0 = (n-1)!\,(n-2)!\ldots 1!.$$

Aus dem eben Gesagten ergiebt sich dann, dass bei einer beliebigen Ordnung von $\alpha, \beta, \ldots \nu$ der Ausdruck P dem absoluten Betrage nach mit P_0 übereinstimmen muss, d. h.

$$\frac{P}{P_0} = \pm 1$$

ist. Setzen wir

$$\frac{P}{P_0} = (\alpha, \beta, \ldots \nu),$$

so folgt leicht, dass $(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem die Anzahl der Inversionen in der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \nu$ gerade oder ungerade ist.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun die Grössen $[\alpha, \beta, \ldots \nu]'$ durch die Gleichung

$$[\alpha, \beta, \ldots \nu] = (\alpha, \beta, \ldots \nu).[\alpha, \beta, \ldots \nu]'$$

einführen; $[\alpha, \beta, \ldots \nu]'$ hat dann einen ganz bestimmten Werth, da der Fall, dass zwei der Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ einander gleich sind, ausgeschlossen ist.

Aus der Gleichung (2.) ergiebt sich

$$[\beta, \alpha, \ldots \nu]'(\beta, \alpha, \ldots \nu) = -[\alpha, \beta, \ldots \nu]'(\alpha, \beta, \ldots \nu)$$

oder, da

$$(\beta, \alpha, \dots \nu) = -(\alpha, \beta, \dots \nu)$$

ist,

$$[\beta, \alpha, \dots \nu]' = [\alpha, \beta, \dots \nu]'.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung folgert man, dass $[\alpha, \beta, \dots \nu]'$ überhaupt von der Anordnung der Grössen $\alpha, \beta, \dots \nu$ unabhängig ist; wir können also diesen Coefficienten, der bei allen Gliedern von A derselbe ist und mit C bezeichnet werden soll, aus der Summe herausziehen:

$$A = C\Sigma'(\alpha, \beta, \dots \nu)\, a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}. \tag{3.}$$

Bis hierher sind nur die oben mit 1) und 2) bezeichneten Eigenschaften benutzt; der allgemeinste Ausdruck, der diese Eigenschaften besitzt, muss also die Form (3.) haben, und umgekehrt hat jeder Ausdruck von der Form (3.) die Eigenschaften 1) und 2).

Um nun die Constante C zu bestimmen, wenden wir die dritte Eigenschaft an, setzen also

$$a_{\alpha\alpha} = 1, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$
$$a_{\beta\gamma} = 0 \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots n;\ \beta \gtrless \gamma).$$

Es bleibt dann auf der rechten Seite der Formel (3.) nur das eine Glied

$$C.(1, 2, \dots n)$$

übrig, und da $(1, 2, \dots n) = 1$ ist und A für diese Wahl der Elemente den Werth 1 annehmen soll, so ergiebt sich

$$C = 1,$$

und somit

$$A = \Sigma'(\alpha, \beta, \dots \nu)\, a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}.$$

Durch die angegebenen drei Eigenschaften ist demnach das Bildungsgesetz der Function A vollkommen bestimmt, und da es mit dem übereinstimmt, durch welches die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ gewöhnlich erklärt wird, so wollen wir jetzt A als die Determinante der n^2 Grössen $a_{11}, a_{12}, \dots a_{nn}$ bezeichnen.

2.

Mittels der gewonnenen Ergebnisse kann z. B. sehr einfach bewiesen werden, dass die Determinante ungeändert bleibt, wenn die Zeilen und Colonnen (Horizontal- und Verticalreihen) mit einander vertauscht werden.

Die Ausführung dieser Operation in dem Ausdruck

$$A = \sum(\alpha, \beta, \dots \nu)\, a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}$$

kommt auf eine Vertauschung des ersten Index mit dem zweiten in jedem Elemente hinaus; A geht dann über in

$$A' = \sum(\alpha, \beta, \dots \nu)\, a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\nu n}.$$

Daraus folgt, dass A' in Bezug auf die Elemente jeder Zeile eine lineare homogene Function ist; denn diejenigen Glieder, in denen zwei der Zahlen $\alpha, \beta, \dots \nu$ einander gleich sind, fallen wegen der Eigenschaften des Zeichens $(\alpha, \beta, \dots \nu)$ weg. Ferner entspricht für jedes zulässige Werthsystem $\alpha, \beta, \dots \nu$ dem Gliede

(1.) $$(\alpha, \beta, \dots \nu)\, a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\nu n}$$

ein anderes Glied

(2.) $$(\beta, \alpha, \dots \nu)\, a_{\beta 1} a_{\alpha 2} \dots a_{\nu n}.$$

Nimmt man nun an, dass die entsprechenden Elemente der α^{ten} und β^{ten} Zeile einander gleich sind, d. h. dass $a_{\alpha 1} = a_{\beta 1}$, $a_{\alpha 2} = a_{\beta 2}$, ..., so heben sich die Glieder (1.) und (2.) gegen einander auf, da

$$(\alpha, \beta, \dots \nu) = -(\beta, \alpha, \dots \nu)$$

ist; es nimmt also A' in diesem Falle den Werth Null an. Hieraus ergiebt sich, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, dass A' nur das Vorzeichen ändert, wenn zwei Zeilen mit einander vertauscht werden. Ferner ist leicht zu sehen, dass für

$$a_{\alpha\alpha} = 1, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$
$$a_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n;\ \alpha \gtrless \beta)$$

$A' = 1$ wird. Der Ausdruck A' hat mithin die charakteristischen Eigenschaften von A und muss also mit A identisch sein.

Eine weitere Anwendung der Ergebnisse des ersten Abschnitts lässt sich auf die Herleitung des Begriffs der Unterdeterminanten machen. Wir wissen aus dem Vorhergehenden, dass jedes Glied der Determinante ein Product von n Elementen ist, dass ferner jedes Element nur in der ersten Potenz vorkommt, und dass endlich aus jeder Zeile und Colonne ein und nur ein Element in jedem Gliede vorkommt. Man kann daher der Determinante A des Systems

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

oder, wie wir dafür kurz schreiben wollen, des Systems $\{a_{\alpha\beta}\}$, folgende Form geben:

$$A = a_{\lambda\mu} \cdot A_{\lambda\mu} + A',$$

und es kommt dann das Element $a_{\lambda\mu}$ weder in $A_{\lambda\mu}$ noch in A' vor. Es lässt sich zeigen, dass der Coefficient $A_{\lambda\mu}$ selbst wieder eine Determinante ist, welche in sehr einfacher Weise aus A erhalten werden kann. Wir können $A_{\lambda\mu}$ auch als diejenige Grösse erklären, in welche A übergeht, wenn man $a_{\lambda\mu} = 1$ und alle übrigen Elemente der λ^{ten} Zeile und μ^{ten} Colonne gleich Null setzt. Denn die letzteren Elemente kommen in $A_{\lambda\mu}$ nicht mehr vor, wohl aber in A', und zwar muss A' eine lineare homogene Function dieser Elemente sein, so dass, wenn diese gleich Null sind, auch A' verschwindet.

Um nun eine leichtere Übersicht zu gewinnen, wollen wir zunächst $\lambda = \mu = n$ annehmen. Wenn man dann, wie eben verlangt wurde,

$$\begin{aligned} a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1,n} &= 0, \\ a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{n,n-1} &= 0, \\ a_{nn} &= 1 \end{aligned} \qquad (3.)$$

setzt, so erhält man

$$A_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist eine lineare homogene Function der Elemente jeder Zeile des Systems

$$(4.) \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}; \end{matrix}$$

ferner verschwindet er, wenn zwei Zeilen dieses Systems einander gleich gesetzt werden, weil dann auch zwei Zeilen des Systems

$$\{a_{\alpha\beta}\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$$

für die speciellen Werthe (3.) einander gleich werden; endlich wird offenbar $A_{nn} = 1$, wenn

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{n-1,n-1} = 1$$

und alle übrigen Elemente von (4.) gleich Null sind. Mithin ist A_{nn} gleich der Determinante des Systems (4.), welches aus dem ursprünglichen System durch Weglassung der n^{ten} Zeile und der n^{ten} Colonne hervorgeht.

Um nun $A_{\lambda\mu}$ zu berechnen, bringen wir es durch $(n-\lambda)$ Vertauschungen dahin, dass die λ^{te} Zeile zur n^{ten} Zeile wird, wobei zunächst die λ^{te} Zeile mit der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$, dann mit der $(\lambda+2)^{\text{ten}}$ u. s. f. vertauscht wird; ebenso machen wir durch $(n-\mu)$ aufeinanderfolgende Vertauschungen die μ^{te} Colonne zur n^{ten}, so dass jetzt das Element $a_{\lambda\mu}$ die Stelle von a_{nn} einnimmt. Durch diese $2n-\lambda-\mu$ Vertauschungen ist aber die Determinante mit $(-1)^{\lambda+\mu}$ multiplicirt worden, und es ist daher

$$A_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda+\mu} A^{(\lambda\mu)},$$

wo $A^{(\lambda\mu)}$ die Determinante desjenigen Systems von $(n-1)^2$ Elementen bedeutet, welches aus dem gegebenen durch Weglassung der λ^{ten} Zeile und μ^{ten} Colonne hervorgeht.

Die Grössen $A_{\lambda\mu}$ werden als Unterdeterminanten der Determinante A des Systems $\{a_{\alpha\beta}\}$ bezeichnet. Das System $\{A_{\alpha\beta}\}$ heisst das dem gegebenen adjungirte.

Man kann die hier gegebene Definition der Determinante durch die drei charakteristischen Eigenschaften auch für die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen benutzen.

Gesetzt, es sei das Gleichungssystem

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_{\beta} = y_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben, so betrachte man die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ y_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da dieselbe eine lineare homogene Function der Grössen y_{α} ist, so können wir sie, nachdem wir für diese die linearen homogenen Functionen der Grössen x_{β} eingesetzt haben, schreiben:

$$\sum_{\beta} \begin{vmatrix} a_{1\beta} x_{\beta}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n\beta} x_{\beta}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$\sum_{\beta} x_{\beta} \begin{vmatrix} a_{1\beta} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n\beta} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Von den n Determinanten, die in dieser Summe vorkommen, ist die erste gleich der Determinante A des Systems $\{a_{\alpha\beta}\}$, alle anderen verschwinden, weil in ihnen stets zwei Colonnen gleich sind. Wir haben also die Gleichung

$$A . x_1 = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ y_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

durch welche die Unbekannte x_1 bestimmt wird. In ähnlicher Weise bestimmen sich die übrigen Unbekannten, und zwar erhält man

$$A . x_{\beta} = \sum_{\alpha} A_{\alpha\beta} y_{\alpha}.$$

3.

Wir gehen nun zur Entwickelung der Lehrsätze über die Zusammensetzung der Systeme über.

Zwischen n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und n anderen $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ mögen die Gleichungen bestehen

$$x_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x'_\beta, \tag{1.}$$

wobei, wie überall im Folgenden, die ersten Buchstaben des griechischen Alphabets Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots n$ bedeuten sollen. Ferner seien die Grössen x'_β wieder linear und homogen durch andere Veränderliche ausgedrückt:

$$x'_\beta = \sum_\gamma a'_{\beta\gamma} x''_\gamma, \tag{2.}$$

endlich

$$x''_\gamma = \sum_\delta a''_{\gamma\delta} x'''_\delta,$$

u. s. f. Man hat dann auch Gleichungen von folgender Form:

$$x_\alpha = \sum_\beta (a, a')_{\alpha\beta} x''_\beta, \tag{1a.}$$

$$x_\alpha = \sum_\beta ((a, a'), a'')_{\alpha\beta} x'''_\beta, \tag{1b.}$$

. . . . . .

Die Coefficienten $(a, a')_{\alpha\beta}, \dots ((a, a'), a'')_{\alpha\beta}$ sind dabei in leicht zu übersehender Weise aus den Grössen $a_{\alpha\beta}, a'_{\alpha\beta}, \dots$ zusammengesetzt. Aus den Gleichungen (1.) und (2) folgt z. B.

$$x_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} a_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta} x''_\beta,$$

mithin

$$(a, a')_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta}.$$

Man bezeichnet das System

$$\{(a, a')_{\alpha\beta}\}$$

als das aus den beiden Systemen $\{a_{\alpha\beta}\}$ und $\{a'_{\alpha\beta}\}$ zusammengesetzte und drückt dies durch die symbolische Gleichung

$$\{a_{\alpha\beta}\} \cdot \{a'_{\alpha\beta}\} = \{(a, a')_{\alpha\beta}\}$$

aus. Dabei ist das Multiplicationszeichen gewählt wegen der Analogie, welche

die Zusammensetzung der Systeme in gewisser Hinsicht mit der Multiplication zeigt. Allerdings besteht bei dieser Zusammensetzung nicht das commutative Gesetz; denn es ist

$$(a', a)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a'_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}$$

von

$$(a, a')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta}$$

verschieden. Wohl aber gilt ein Gesetz, welches dem für die Multiplication einer Summe:

$$a(b+c) = ab + ac$$

ganz analog ist. Denn für

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + b'_{\alpha\beta}$$

wird

$$\{b_{\alpha\beta} + b'_{\alpha\beta}\} \cdot \{a'_{\alpha\beta}\} = \{(b, a')_{\alpha\beta} + (b', a')_{\alpha\beta}\}.$$

Ferner besteht auch ein anderes Gesetz, welches der Multiplicationsgleichung

$$(AB)C = A(BC)$$

entspricht. Wenn man nämlich aus einem System A und einem anderen B ein drittes, und aus diesem und einem System C wieder ein neues zusammensetzt, so erhält man dasselbe, wie wenn man A mit dem aus B und C componirten System zusammensetzen würde. Denn drückt man die Grössen x_α durch die x'_β, diese durch die x''_γ und diese wieder durch die x'''_δ aus, so erhält man das Gleichungssystem

$$(1^b.) \qquad x_\alpha = \sum_{\beta} ((a, a'), a'')_{\alpha\beta} x'''_\beta.$$

Andererseits folgen aus

$$x'_\alpha = \sum_{\gamma} a'_{\alpha\gamma} x''_\gamma,$$
$$x''_\gamma = \sum_{\beta} a''_{\gamma\beta} x'''_\beta$$

die Gleichungen

$$x'_\alpha = \sum_{\beta} (a', a'')_{\alpha\beta} x'''_\beta,$$

und daraus weiter

$$x_\alpha = \sum_\beta (a, (a', a''))_{\alpha\beta} x'''_\beta;$$

in Verbindung mit (1^b.) ergiebt sich also

$$((a, a'), a'')_{\alpha\beta} = (a, (a', a''))_{\alpha\beta}.$$

Man kann daher für diese Coefficienten einfach

$$(a, a', a'')_{\alpha\beta}$$

schreiben. Nun ergiebt sich unmittelbar

$$\{a_{\alpha\beta}\}\cdot\{a'_{\alpha\beta}\}\cdot\{a''_{\alpha\beta}\} = \{a_{\alpha\beta}\}\cdot\{(a', a'')_{\alpha\beta}\} = \{(a, a')_{\alpha\beta}\}\cdot\{a''_{\alpha\beta}\},$$

was den zu beweisenden Satz ausdrückt. Dies kann auf Systeme, die aus beliebig vielen anderen zusammengesetzt sind, ausgedehnt werden.

Weit wichtiger als diese Sätze sind jedoch die Beziehungen, die zwischen den Determinanten der ursprünglichen Systeme und der Determinante des zusammengesetzten Systems, sowie zwischen den zugehörigen Unterdeterminanten bestehen.

Wir untersuchen zunächst die Determinante $|(a, a')_{\alpha\beta}|$ des zusammengesetzten Systems, die wir mit (A, A') bezeichnen wollen, während A und A' die Determinanten $|a_{\alpha\beta}|$ und $|a'_{\alpha\beta}|$ der einfachen Systeme sein sollen. (A, A') ist eine lineare homogene Function von

$$(a, a')_{\alpha 1}, (a, a')_{\alpha 2}, \ldots (a, a')_{\alpha n};$$

diese Grössen sind aber ihrer Definition zufolge selbst wieder lineare homogene Functionen von

$$a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \ldots a_{\alpha n};$$

es ist also (A, A') auch eine lineare homogene Function der Elemente jeder Zeile des Systems $\{a_{\alpha\beta}\}$. Nimmt man ferner an, dass zwei Zeilen des letzteren Systems einander gleich sind, also $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha'\beta}$ $(\beta = 1, 2, \ldots n)$, so werden auch in $\{(a, a')_{\alpha\beta}\}$ die Elemente der α^{ten} denen der α'^{ten} Zeile gleich, mithin $(A, A') = 0$. Demnach hat (A, A') die beiden früher mit 1) und 2) be-

zeichneten Eigenschaften mit A gemeinsam; es ist also, wenn C eine von den Elementen $a_{\alpha\beta}$ unabhängige Grösse bezeichnet,

$$(A, A') = C.A.$$

Um C zu bestimmen, setzen wir

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= 1, \\ a_{\beta\gamma} &= 0, \qquad (\beta \gtrless \gamma) \end{aligned}$$

dann wird $A = 1$ und

$$(a, a')_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta},$$

also $(A, A') = A'$. Demnach ergiebt sich $C = A'$ und

$$(A, A') = A.A',$$

d. h.

$$|a_{\alpha\beta}|\cdot|a'_{\alpha\beta}| = |(a, a')_{\alpha\beta}|,$$

wenn, wie oben,

$$(a, a')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta}$$

ist. Dies ist das Multiplicationstheorem der Determinanten. In den Lehrbüchern wird es gewöhnlich in der Form

$$|a_{\alpha\beta}|\cdot|a'_{\alpha\beta}| = |\sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a'_{\beta\gamma}|$$

geschrieben. Im Grunde genommen, kommt dies auf dasselbe hinaus, da man vor der Zusammensetzung in dem System $\{a'_{\alpha\beta}\}$ die Zeilen mit den Colonnen vertauschen kann; doch ist die hier entwickelte Form vorzuziehen, weil man auf Determinantenproducte zunächst durch Zusammensetzung von Systemen geführt wird.

Wir betrachten nun die Unterdeterminanten des zusammengesetzten Systems, und bezeichnen mit

$$(A, A')_{\alpha\beta}$$

diejenige, die als Coefficient von $(a, a')_{\alpha\beta}$ in der Entwickelung der Determinante (A, A') auftritt.

Durch Auflösung des Gleichungssystems

$$(1^a.) \qquad x_\alpha = \sum_\beta (a, a')_{\alpha\beta} x''_\beta$$

findet man

$$(3.) \qquad (A, A').x''_\beta = \sum_\alpha (A, A')_{\alpha\beta} x_\alpha;$$

andererseits erhält man aus (2.)

$$A'.x''_\beta = \sum_\gamma A'_{\gamma\beta} x'_\gamma,$$

und aus (1.)

$$A.x'_\gamma = \sum_\alpha A_{\alpha\gamma} x_\alpha,$$

also

$$AA'.x''_\beta = \sum_{\alpha,\gamma} A_{\alpha\gamma} A'_{\gamma\beta} x_\alpha.$$

Da nun $AA' = (A, A')$, so folgt durch Vergleichung mit (3.)

$$(A, A')_{\alpha\beta} = \sum_\gamma A_{\alpha\gamma} A'_{\gamma\beta}.$$

Daher ist das System $\{(A, A')_{\alpha\beta}\}$ das aus $\{A_{\alpha\beta}\}$ und $\{A'_{\alpha\beta}\}$ zusammengesetzte:

$$\{A_{\alpha\beta}\}\cdot\{A'_{\alpha\beta}\} = \{(A, A')_{\alpha\beta}\}.$$

Hat man mithin drei Systeme

$$a,\ b,\ c$$

und ihre adjungirten

$$A,\ B,\ C,$$

d. h. die aus den Unterdeterminanten gebildeten Systeme, so ist, wenn c das aus a und b zusammengesetzte System ist, auch C aus A und B zusammengesetzt.

Dieser Satz kann nun, ebenso wie das Multiplicationstheorem, leicht auf die Zusammensetzung beliebig vieler Systeme ausgedehnt werden. Sind z. B. drei Systeme zusammengesetzt:

$$\{a_{\alpha\beta}\}\cdot\{a'_{\alpha\beta}\}\cdot\{a''_{\alpha\beta}\} = \{(a, a', a'')_{\alpha\beta}\},$$

so kann man nach dem Vorhergehenden auch schreiben

$$\{(a, a', a'')_{\alpha\beta}\} = \{(a, a')_{\alpha\beta}\} \cdot \{a''_{\alpha\beta}\}.$$

Mittels des soeben bewiesenen Satzes über das adjungirte System ergiebt sich dann

$$\{(A, A', A'')_{\alpha\beta}\} = \{(A, A')_{\alpha\beta}\} \cdot \{A''_{\alpha\beta}\},$$

und durch nochmalige Anwendung desselben Satzes

$$\{(A, A', A'')_{\alpha\beta}\} = \{A_{\alpha\beta}\} \cdot \{A'_{\alpha\beta}\} \cdot \{A''_{\alpha\beta}\}.$$

ANMERKUNG.

Die vorstehende Mittheilung ist, von formalen Änderungen abgesehen, einer von Paul Günther angefertigten, im Besitz des Mathematischen Vereins der Universität Berlin befindlichen Ausarbeitung der von Weierstrass im Wintersemester 1886—87 gehaltenen Vorlesung über Theorie und Anwendung der bilinearen und quadratischen Formen entnommen. Aber schon in früheren Jahren hatte Weierstrass im mathematischen Seminar der Universität die Herleitung der Fundamentalsätze der Determinantentheorie mit Hülfe der oben zu Grunde gelegten drei charakteristischen Eigenschaften angedeutet.

K.

ZUR THEORIE DER HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

Es sei

$$R(x) = A_0(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2\varrho})$$

eine ganze Function $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades des Argumentes x, wo $A_0, a_0, a_1, \dots a_{2\varrho}$ reelle Constanten bedeuten, und die Grössen $a_0, \dots a_{2\varrho}$ seien so geordnet, dass für $A_0 > 0$

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{2\varrho}$$

und für $A_0 < 0$

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2\varrho}.$$

Dann mögen ϱ Variable $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als Functionen von ebensovielen unbeschränkt veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ mittels der Gleichungen

$$u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_1(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \cdots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_1(x)}{\sqrt{R(x)}}dx,$$

$$u_2 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_2(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_2(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \cdots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_2(x)}{\sqrt{R(x)}}dx,$$

. . . . . .

$$u_\varrho = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_\varrho(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_\varrho(x)}{\sqrt{R(x)}}dx + \cdots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_\varrho(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$$

definirt werden, in denen $F_1(x), F_2(x), \dots F_\varrho(x)$ ganze Functionen von nicht höherem als dem $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeuten.

Es werde gesetzt

$$K_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}} \frac{F_\alpha(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

$$i\overline{K}_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}} \frac{F_\alpha(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx,$$

$$iK'_{\mu\nu} = i\overline{K}_{\mu 1} + i\overline{K}_{\mu 2} + \cdots + i\overline{K}_{\mu\nu},$$

wo in allen Integralen der Werth der vorkommenden Quadratwurzel durch die Formel

$$\sqrt{R(x)} = A_0^{\varrho+1}\left(\frac{x-a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(\frac{x-a_{2\varrho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben wird.

Versteht man noch, je nachdem A_0 positiv oder negativ ist, unter $a_{2\varrho+1}$ den Werth $+\infty$ oder $-\infty$, unter ε den Werth $+1$ oder -1, und bezeichnet die Intervalle

$$a_{2\varrho+1}\ldots a_0,\ a_0\ldots a_1,\ a_1\ldots a_2,\ \ldots\ a_{2\varrho}\ldots a_{2\varrho+1}$$

der Reihe nach mit

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\quad 2\varrho+1,$$

so kann man setzen

$$\sqrt{R(x)} = \varepsilon^{\varrho+1} i^\lambda \sqrt{(-1)^\lambda R(x)},$$

wo λ das Intervall anzeigt, in dem x liegt, und $\sqrt{(-1)^\lambda R(x)}$ positiv zu nehmen ist.*)

Die Zahlen $\overset{\lambda}{m}_1, \ldots \overset{\lambda}{m}_\varrho, \overset{\lambda}{n}_1, \ldots \overset{\lambda}{n}_\varrho$ seien so gewählt, dass

$$\int_\infty^{a_\lambda} \frac{F_\alpha(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \overset{\lambda}{m}_1 K_{\alpha 1} + \cdots + \overset{\lambda}{m}_\varrho K_{\alpha\varrho} + i(\overset{\lambda}{n}_1 K'_{\alpha 1} + \cdots + \overset{\lambda}{n}_\varrho K'_{\alpha\varrho})$$

gesetzt werden kann; ihre Werthe sind in der folgenden Tabelle enthalten.

λ	$\overset{\lambda}{m}_1$	$\overset{\lambda}{m}_2$	$\cdots$	$\overset{\lambda}{m}_\varrho$	$\overset{\lambda}{n}_1$	$\overset{\lambda}{n}_2$	$\cdots$	$\overset{\lambda}{n}_\varrho$
0	-1	-1	$\cdots$	-1	0	0	$\cdots$	0
1	-1	-1	$\cdots$	-1	1	0	$\cdots$	0
2	0	-1	$\cdots$	-1	1	0	$\cdots$	0
3	0	-1	$\cdots$	-1	0	1	$\cdots$	0
. .	. .	. .	$\cdots$	. .	. .	. .	$\cdots$	. .
2ϱ	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	1

*) [Vgl. Bd. I S. 137 dieser Ausgabe.]

An Stelle von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sollen nun andere Veränderliche $v_1, v_2, \dots v_\varrho$ mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2 + \cdots + 2K_{1\varrho}v_\varrho, \\ u_2 &= 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2 + \cdots + 2K_{2\varrho}v_\varrho, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho &= 2K_{\varrho 1}v_1 + 2K_{\varrho 2}v_2 + \cdots + 2K_{\varrho\varrho}v_\varrho \end{aligned}$$

eingeführt werden, aus denen

$$\begin{aligned} v_1 &= G_{11}u_1 + G_{21}u_2 + \cdots + G_{\varrho 1}u_\varrho, \\ v_2 &= G_{12}u_1 + G_{22}u_2 + \cdots + G_{\varrho 2}u_\varrho, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_\varrho &= G_{1\varrho}u_1 + G_{2\varrho}u_2 + \cdots + G_{\varrho\varrho}u_\varrho \end{aligned}$$

folgen möge.*) Wird

$$\tau_{\alpha\beta} = (2G_{1\alpha}K'_{1\beta} + 2G_{2\alpha}K'_{2\beta} + \cdots + 2G_{\varrho\alpha}K'_{\varrho\beta})\,i$$

gesetzt, wo dann

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

ist, so werden die ϑ-Functionen durch die Gleichungen erklärt

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho) = \sum_{(n_1, \dots n_\varrho)} e^{\pi i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta} \cos(2n_1 v_1 + \cdots + 2n_\varrho v_\varrho)\pi,$$

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\lambda = \sum_{(n_1, \dots n_\varrho)} e^{\pi i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}\left(n_\alpha + \frac{1}{2}\overset{\lambda}{n}_\alpha\right)\left(n_\beta + \frac{1}{2}\overset{\lambda}{n}_\beta\right)} \cos\left[\left(n_1 + \frac{1}{2}\overset{\lambda}{n}_1\right)(2v_1 + \overset{\lambda}{m}_1) + \cdots\right]\pi,$$

in denen $n_1, \dots n_\varrho$ bei der Summation unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen haben. Unter

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{\lambda\mu}$$

soll die Function verstanden werden, in die $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\lambda$ dadurch übergeht, dass $\overset{\lambda}{m}_\alpha, \overset{\lambda}{n}_\alpha$ durch $\overset{\lambda\mu}{m}_\alpha, \overset{\lambda\mu}{n}_\alpha$ ersetzt werden, wo $\overset{\lambda\mu}{m}_\alpha$ entweder gleich Null oder gleich -1, $\overset{\lambda\mu}{n}_\alpha$ entweder gleich Null oder gleich $+1$ und so angenommen ist, dass

$$\begin{aligned} \overset{\lambda\mu}{m}_\alpha &\equiv \overset{\lambda}{m}_\alpha + \overset{\mu}{m}_\alpha \mod 2, \\ \overset{\lambda\mu}{n}_\alpha &\equiv \overset{\lambda}{n}_\alpha + \overset{\mu}{n}_\alpha \mod 2. \end{aligned}$$

*) [Vgl. Bd. I S. 148—150 dieser Ausgabe.]

Endlich sei noch

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\varrho),$$
$$R_1(x) = \frac{R(x)}{A_0}.$$

Mit Hülfe aller dieser Bezeichnungen ergeben sich auf Grund des durch die ϱ Integralgleichungen vermittelten Zusammenhanges zwischen den beiden Grössensystemen $u_1, \dots u_\varrho$ und $x_1, \dots x_\varrho$ die folgenden Formeln:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\varrho(-1)^\alpha \varphi(a_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{R_1'(a_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)},$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\varrho(-1)^{\alpha-1} \varphi(a_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{-R_1'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)},$$

$$\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}} \sum_\alpha \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x_\alpha - a_\lambda)(x_\alpha - a_\mu)\varphi'(x_\alpha)} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)\,\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\lambda\,\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\mu},$$

wo das Vorzeichen von $a_\lambda - a_\mu$ so zu wählen ist, dass $\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}$ positiv wird, während der Quadratwurzel der positive Werth beigelegt wird. Die Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$ müssen dieselben Werthe haben, wie die Endwerthe von $\sqrt{R(x)}$ bei den einzelnen Integrationen in dem ersten Gleichungssystem (S. 289).

Man erhält ferner, wenn

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2\varrho-1})$$

gesetzt wird,

$$\sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{P(x)}{P(a)}\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-a} =$$
$$-\sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial \log \vartheta(v_1', \dots v_\varrho')}{\partial v_\alpha'} + \log \frac{\vartheta(0, \dots 0)\,\vartheta(v_1 + v_1', \dots v_\varrho + v_\varrho')}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)\,\vartheta(v_1', \dots v_\varrho')},$$

wo

$$v_\alpha' = G_{1\alpha} w_1 + G_{2\alpha} w_2 + \dots + G_{\varrho\alpha} w_\varrho$$

und

$$w_\alpha = \int_a^\infty \frac{F_\alpha(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

In diesem Integral muss der Anfangswerth von $\sqrt{R(x)}$ mit dem in der vorangehenden Integralformel vorkommenden Werthe von $\sqrt{R(a)}$ übereinstimmen.

Die Integration zwischen $a_{2\alpha-1}$ und x_α ist auf dieselbe Weise auszuführen wie in dem ersten Gleichungssystem. Unter derselben Voraussetzung gelten noch die Formeln

$$\sum_\alpha \frac{1}{2}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{P(x)}{P(a)}\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\frac{dx}{x-a} =$$

$$-\sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial \log \vartheta(v'_1, \dots v'_\varrho)}{\partial v'_\alpha} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(v_1+v'_1, \dots v_\varrho+v'_\varrho)}{\vartheta(v_1-v'_1, \dots v_\varrho-v'_\varrho)},$$

$$\frac{\varphi(a)}{P(a)} = \frac{\vartheta^2(0, \dots 0)\,\vartheta(v_1+v'_1, \dots v_\varrho+v'_\varrho)\,\vartheta(v_1-v'_1, \dots v_\varrho-v'_\varrho)}{\vartheta^2(v_1, \dots v_\varrho)\,\vartheta^2(v'_1, \dots v'_\varrho)}.$$

Die Systeme von Fundamentalperioden $2K_{\alpha\beta}$, $2iK'_{\alpha\beta}$, die bei der Definition der ϑ-Functionen auftreten, können nach einem jetzt näher anzugebenden Verfahren auf unendlich viele Weisen durch andere ersetzt werden.

Es sei

$$(P_1, \dots P_\varrho,\ Q_1, \dots Q_\varrho)$$

ein System von Fundamentalperioden einer Integralfunction, die aus je ϱ Integralen erster und zweiter Art zusammengesetzt ist. Jede homogene lineare Function dieser Fundamentalperioden mit ganzzahligen Coefficienten stellt wieder eine Periode des Integrals dar.

Sind p und p' zwei solche Perioden, und

$$p = a_1 P_1 + \dots + a_\varrho P_\varrho + b_1 Q_1 + \dots + b_\varrho Q_\varrho,$$
$$p' = a'_1 P_1 + \dots + a'_\varrho P_\varrho + b'_1 Q_1 + \dots + b'_\varrho Q_\varrho,$$

so wird durch das Periodenpaar p, p' eine ganze Zahl (p, p') vermittelst der Formel

$$(p, p') = a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \dots + a_\varrho b'_\varrho - (a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_\varrho b_\varrho)$$

bestimmt. Aus dieser folgt

$$(p, p') = -(p', p),\quad (p, p) = 0,$$

und wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$(p, mp') = m(p, p'),\quad (mp, p') = m(p, p').$$

Ferner gelten, wenn p'' eine dritte Periode derselben Art wie p und p' be-

zeichnet, die Gleichungen

$$(p, p'+mp'') = (p, p') + m(p, p''),$$
$$(p+mp'', p') = (p, p') + m(p'', p').$$

Sind nun

$$p_1, \dots p_\varrho, \quad q_1, \dots q_\varrho$$

2ϱ in der eben beschriebenen Weise aus den obigen Fundamentalperioden entstandene Perioden, so bilden sie wieder ein Fundamentalsystem, wenn sie folgenden Bedingungsgleichungen genügen, in denen α und β beliebige Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots \varrho$ bedeuten:

$$\begin{aligned} (p_\alpha, p_\beta) &= 0, \\ (q_\alpha, q_\beta) &= 0, \\ (p_\alpha, q_\beta) &= 0, \qquad (\beta \gtrless \alpha) \\ (p_\alpha, q_\alpha) &= 1. \end{aligned}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann das System auf vier verschiedene Arten in ein anderes umgestaltet werden, das denselben Bedingungsgleichungen ebenfalls genügt.

Und zwar kann erstens, wenn λ irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \dots \varrho$ bedeutet, q_λ an die Stelle von p_λ und gleichzeitig $-p_\lambda$ an die Stelle von q_λ gesetzt werden, woraus sofort folgt, dass das Paar p_λ, q_λ auch durch $-p_\lambda, -q_\lambda$ und durch $-q_\lambda, p_\lambda$ ersetzt werden darf.

Zweitens können irgend zwei Perioden aus der Reihe $p_1, \dots p_\varrho$ unter einander vertauscht werden, wenn dasselbe mit den beiden entsprechenden Perioden aus der Reihe $q_1, \dots q_\varrho$ geschieht.

Drittens darf q_λ durch $q_\lambda + mp_\lambda$ vertreten werden, für m als ganze Zahl.

Endlich können, für $\mu \gtrless \lambda$, gleichzeitig p_λ durch $p_\lambda + mp_\mu$ und q_μ durch $q_\mu - mq_\lambda$ ersetzt werden.

ANMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung ist, von unbedeutenden Änderungen abgesehen, der Inauguraldissertation von M. Henoch: De Abelianarum functionum periodis (Berolini 1867) entnommen, wo sie, als Mittheilung von Weierstrass an den Verfasser, auf S. 2—5 in lateinischer Sprache reproducirt ist. Ihrem Inhalt nach deckt sie sich im Wesentlichen mit dem ebenfalls eine Mittheilung von Weierstrass wiedergebenden § 1 der Abhandlung von L. Königsberger: Zur Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung (Crelles Journal Bd. 64 (1865), S. 18—21). An einigen Stellen, auf die durch Fussnoten hingewiesen ist, unterscheidet sie sich nur in den Bezeichnungen von der von Weierstrass selbst veröffentlichten Arbeit Zur Theorie der Abelschen Functionen (Crelles Journal Bd. 47 (1854); Bd. I S. 133—152 dieser Ausgabe).

K.

UBER NORMALFORMEN ALGEBRAISCHER GEBILDE.

Die Aufgabe, die im Folgenden für specielle Fälle behandelt werden soll, ist: die einfachsten Gleichungen aufzustellen, durch welche eine gegebene zwischen x und y ersetzt werden kann, oder: alle Gleichungen vom Range ϱ zu bilden, aus denen die übrigen durch Transformation entstehen. Eine Gleichung zwischen x und y kann ersetzt werden durch eine andere zwischen zwei rationalen Functionen ξ, η von x, y, die nur der Beschränkung unterworfen sind, dass auch umgekehrt x, y sich rational durch ξ, η ausdrücken lassen. Um die einfachsten Gleichungen zu erhalten, wählt man die rationalen Functionen ξ und η in der Weise, dass sie nur an einer Stelle und von möglichst niedriger Ordnung unendlich werden. Solche Normalgleichungen werden im Folgenden für $\varrho = 1, 2, 3$ vollständig aufgestellt; bequem durchführbar ist die Untersuchung noch für $\varrho = 4$. Der Fall $\varrho = 5$ ist schon complicirter; doch scheint es, als ob sich die Aufgabe allgemein erledigen lasse.

$\varrho = 1.$

Für jede Stelle des Gebildes vom Range 1 giebt es rationale Functionen, die nur an dieser Stelle unendlich werden von der zweiten, dritten und jeder höheren Ordnung, aber für keine Stelle existirt eine Function, die nur an dieser und von der Ordnung 1 unendlich wird. Man kann daher eine unendliche Reihe von Functionen

$$\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots$$

aufstellen, die nur an einer, willkürlich angenommenen Stelle unendlich werden, jede von derjenigen Ordnung, die ihr Index angiebt.*) Zwei davon, und zwar die beiden ersten, greifen wir heraus. ξ_2^3 und ξ_3^2 sind von der Ordnung 6, beginnen also, nach Potenzen von t entwickelt,**) beide mit t^{-6}. Die Coefficienten der Anfangsglieder können dadurch in Übereinstimmung gebracht werden, dass ξ_2^3 mit einem constanten Factor a multiplicirt wird; die Differenz

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3$$

ist dann eine Function von der fünften Ordnung.

$\xi_2\xi_3$ ist ebenfalls von der fünften Ordnung und kann mit einem constanten Factor b so multiplicirt werden, dass die Anfangscoefficienten beider Functionen übereinstimmen. Dann wird

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3$$

eine Function vierter Ordnung. Eine solche ist auch ξ_2^2; man wird also c so wählen können, dass

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3 - c\xi_2^2$$

von der dritten Ordnung ist. Fährt man so fort, so kann man noch die Coefficienten d und e so bestimmen, dass

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3 - c\xi_2^2 - d\xi_3 - e\xi_2$$

von einer niedrigeren als der zweiten Ordnung unendlich wird. Eine solche Function existirt aber nicht; es wird also

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3 - c\xi_2^2 - d\xi_3 - e\xi_2 - f = 0$$

sein müssen, wo auch f eine Constante bedeutet. Diese Gleichung, welche in ξ_3 quadratisch ist, kann man in der Form

$$(\xi_3 - \tfrac{1}{2}(b\xi_2 + d))^2 = a\xi_2^3 + b'\xi_2^2 + c'\xi_2 + d'$$

schreiben. Nun ändert die Function ξ_3 ihren Charakter nicht, wenn man

*) [Vgl. Bd. IV S. 225 dieser Ausgabe.]

**) [Vgl. über die Bedeutung von t Bd. IV S. 16 dieser Ausgabe.]

sie durch $\xi_2 - \frac{1}{2}(b\xi_2 + d)$ ersetzt. Bezeichnen wir diese Grösse mit η, so erhalten wir

$$\eta^2 = a\xi_2^3 + b'\xi_2^2 + c'\xi_2 + d'.$$

Hier kann noch $\xi_2 = \alpha\xi + \beta$ gesetzt und α, β so bestimmt werden, dass der Coefficient von ξ_2^3 den speciellen Werth 4 annimmt, der von ξ_2^2 gleich Null wird. Es wird nämlich

$$\eta^2 = a(\alpha^3\xi^3 + 3\alpha^2\beta\xi^2 + \cdots) + b'(\alpha^3\xi^2 + \cdots) + \cdots.$$

Man setze nun

$$a\alpha^3 = 4, \quad 3a\alpha^2\beta + b'\alpha^2 = 0.$$

Diese Bestimmung von α und β ist möglich, da a nicht gleich Null ist.

Die Gleichung zwischen ξ und η nimmt jetzt die Form an:

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3.$$

Man kann noch eine Constante herausbringen, indem man bewirkt, dass g_2 und g_3 einander gleich werden. Setzt man nämlich

$$\eta = m\eta', \quad \xi = n\xi',$$

so wird

$$m^2\eta'^2 = 4n^3\xi'^3 - g_2 n\xi' - g_3.$$

Wählt man die Factoren m, n so, dass

$$n = \frac{g_3}{g_2}, \quad m^2 = n^3$$

ist, so erhält man in der That

$$\eta'^2 = 4\xi'^3 - \lambda(\xi' + 1)$$

für

$$\lambda = \frac{g_3}{m^2} = \frac{g_2^3}{g_3^2}.$$

Da aber hierbei der Fall $g_2 = 0$ ausgeschlossen werden muss, so ist es zweckmässiger, beide Constanten g_2 und g_3 beizubehalten.

Es ist jetzt nicht schwer zu sehen, dass durch ξ und η alle rationalen Functionen des Paares (xy), und somit auch x und y selbst, rational ausgedrückt werden können.

Zunächst ist klar, dass nach Aufstellung der Reihe

$$\xi_2, \xi_3, \xi_4, \cdots$$

jede rationale Function, die nur an der betrachteten Stelle unendlich wird, dargestellt werden kann in der Form

$$\xi = a_0 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + \cdots,$$

wo $a_0, a_2, \ldots$ constante Coefficienten bedeuten; die Reihe auf der rechten Seite bricht mit $a_n\xi_n$ ab, wenn ξ von der n^{ten} Ordnung ist. Nun können wir die Functionen ξ_α in folgender Weise wählen:

$$\xi_2 = \xi, \quad \xi_3 = \eta, \quad \xi_4 = \xi^2, \quad \xi_5 = \xi\eta, \quad \ldots,$$

allgemein

$$\xi_m \text{ gleich } \xi^{\frac{m}{2}} \text{ oder } \xi^{\frac{m-3}{2}}\eta,$$

je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Daraus folgt: Jede rationale Function von x, y, die nur an der gewählten Stelle unendlich wird, lässt sich als ganze Function von ξ, η darstellen.

Haben wir aber eine Function ζ, die ausser an dieser auch an anderen Stellen unendlich gross wird, so lässt sich eine ganze Function $G(\xi)$ so wählen, dass das Product $\zeta . G(\xi)$ nur gleichzeitig mit ξ unendlich wird. Man hat zu diesem Zweck nur diejenigen endlichen Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu bestimmen, die ξ an den Stellen annimmt, wo ζ unendlich wird, und die zugehörigen Ordnungszahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$. Setzt man alsdann

$$G(\xi) = \Pi(\xi - a_\lambda)^{m_\lambda},$$

so kann $\zeta . G(\xi)$ offenbar nur gleichzeitig mit ξ unendlich werden. Demnach ist

$$\zeta . G(\xi) = F(\xi, \eta),$$

wo $F(\xi, \eta)$ eine ganze Function von ξ und η bedeutet. Hiermit ist bewiesen, dass alle rationalen Functionen von x, y, also auch x und y selbst, sich rational durch ξ, η ausdrücken lassen.

$$\varrho = 2.$$

Von diesem Werthe des Ranges an gilt die Bemerkung, dass eine ausgezeichnete Stelle immer so gewählt werden kann, dass eine Function existirt, die nur an ihr und zwar von der Ordnung ϱ oder einer niedrigeren, unendlich gross wird. Die Stelle ist nämlich so anzunehmen, dass eine bestimmte Determinante verschwindet.*) Die Zahl 1 fehlt sicher in der Reihe der Ordnungszahlen; ξ_2 muss demnach existiren. Ausser der Zahl 1 muss noch eine fehlen, und dies muss 3 sein. Denn angenommen, es wäre ξ_3 vorhanden, so würden, da ξ_4 sicher vorhanden ist, weil man hierfür ξ_2^2 nehmen kann, alle folgenden Functionen: $\xi_5, \xi_6, \xi_7, \ldots$ ebenfalls vorhanden sein; für ξ_5 könnte man $\xi_2\xi_3$ nehmen, dann ξ_2^3 für ξ_6, u. s. f.

Also muss ξ_3 fehlen; die Functionen $\xi_2, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \ldots$ existiren dann sämmtlich.

Zwischen je zwei dieser Functionen besteht eine algebraische Gleichung. ξ_2 und ξ_4 zu wählen, würde unzweckmässig sein, weil sich durch diese Functionen nicht umgekehrt x und y rational ausdrücken lassen. Wir untersuchen also, welche Gleichung zwischen ξ_2 und ξ_5 besteht.

ξ_5^2 ist von der Ordnung 10; $\xi_5^2 - a\xi_2^5$, wenn a zweckmässig bestimmt wird, von der Ordnung 9; in ähnlicher Weise wie vorher schliesst man weiter, dass der Ausdruck

$$\xi_5^2 - a\xi_2^5 - b\xi_2^3\xi_5 - c\xi_2^4 - d\xi_2\xi_5 - e\xi_2^3 - f\xi_5 - g\xi_2^2$$

bei geeigneter Wahl der Coefficienten von der Ordnung 3 sein müsste. Eine solche Function existirt aber nicht; folglich muss dieses Aggregat von der Ordnung 2 und demnach in der Form $h\xi_2 + k$ darstellbar sein. Wir bekommen also zwischen ξ_5 und ξ_2 die Gleichung

$$(\xi_5 - \tfrac{1}{2}(b\xi_2^2 + d\xi_2 + f))^2 = R(\xi_2),$$

wo $R(\xi_2)$ eine ganze Function fünften Grades bedeutet. Oder, wenn in derselben Weise wie vorhin ξ_5 und ξ_2 durch ξ und η ersetzt werden:

$$\eta^2 = 4\xi^5 - g_1\xi^3 - g_2\xi^2 - g_3\xi - g_4.$$

Es lässt sich noch, ebenso wie dort, eine letzte Reduction vornehmen, durch

*) [Vgl. Bd. IV S. 213 dieser Ausgabe.]

die die Anzahl der vorkommenden Constanten um eine Einheit verringert wird; die Gleichung enthält also drei wesentliche Constanten.

$$\varrho = 3.$$

Wir wählen wieder eine Stelle so, dass eine Function existirt, die nur an dieser Stelle und von der Ordnung ϱ oder einer niedrigeren unendlich wird.

Existirt ξ_2, so giebt es auch Functionen der vierten, sechsten, achten Ordnung, u. s. w., nämlich $\xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4, \ldots$. ξ_3 und ξ_5 müssen dann fehlen, ξ_7 aber existiren. In $\xi_2\xi_7, \xi_2^2\xi_7, \ldots$ haben wir dann Functionen neunter, elfter Ordnung u. s. f. vor uns. Die Reihe der fehlenden Zahlen ist demnach hier 1, 3, 5.

Fehlt ξ_2, so existirt ξ_3. Ausser den Ordnungszahlen 1, 2 muss dann noch eine fehlen und zwar 4 oder 5. Denn wenn ξ_3, ξ_4, ξ_5 existirten, so könnte man aus ihnen auch Functionen aller höheren Ordnungen bilden, z. B. $\xi_3^2 = \xi_6$, $\xi_3\xi_4 = \xi_7$, $\xi_3\xi_5 = \xi_8$, ...

Die fehlenden Ordnungszahlen sind demnach für $\varrho = 3$ entweder 1, 3, 5 oder 1, 2, 4 oder 1, 2, 5. Wir behandeln zunächst den Fall, wo die Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_4 fehlen, $\xi_3, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \ldots$ aber existiren.

Greifen wir aus dieser Reihe ξ_3, ξ_5, ξ_7 heraus, so lässt sich allgemein eine Function ξ von der n^{ten} Ordnung mittels eines der drei Ausdrücke

$$\xi_3^n \quad \text{oder} \quad \xi_3^m\xi_5 \quad \text{oder} \quad \xi_3^m\xi_7$$

bilden, vorausgesetzt dass n nicht gleich 1, 2 oder 4 ist; denn jede Zahl, die grösser ist als 4, lässt sich darstellen in einer der drei Formen $3m$, $3m+5$ oder $3m+7$. Es folgt hieraus, dass jede Function, die nur an der betrachteten Stelle unendlich wird, in die Form

$$\xi = \alpha\xi_7 + \beta\xi_5 + \gamma$$

gesetzt werden kann, wo α, β, γ ganze Functionen von ξ_3 sind, und zwar nur auf eine Weise, weil eine Gleichung

$$\alpha'\xi_7 + \beta'\xi_5 + \gamma' = 0$$

nur bestehen kann, wenn α', β' und γ' gleich Null sind. Die Grade der drei

Functionen α, β, γ bestimmen sich dadurch, dass eins der drei Producte $\alpha\xi_7$, $\beta\xi_5, \gamma$ von derselben Ordnung sein muss wie ξ, die beiden anderen von niedrigerer.

Man kann also folgende Gleichungen ansetzen:

$$\begin{aligned}\xi_5^2 &= \alpha_1\xi_7 + \beta_1\xi_5 + \gamma_1,\\ \xi_5\xi_7 &= \alpha_2\xi_7 + \beta_2\xi_5 + \gamma_2,\\ \xi_7^2 &= \alpha_3\xi_7 + \beta_3\xi_5 + \gamma_3.\end{aligned}$$

Hierbei kann α_2 höchstens vom ersten, β_2 höchstens vom zweiten Grade in Bezug auf ξ_3 sein. Daher kann ξ_5 durch $\xi_5 - \alpha_2$, ξ_7 durch $\xi_7 - \beta_2$ ersetzt werden. Hierdurch wird bewirkt, dass die Coefficienten α_2, β_2 fortfallen, die mittlere Gleichung also die einfachere Form annimmt:

$$\xi_5\xi_7 = \gamma_2.$$

Aus den drei Gleichungen ist nun ξ_7 zu eliminiren. Wir bilden zunächst $\xi_5^2\xi_7$ auf doppelte Weise, indem wir die erste Gleichung mit ξ_7, die zweite mit ξ_5 multipliciren. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\alpha_1\xi_7^2 + \beta_1\xi_5\xi_7 + \gamma_1\xi_7 = \gamma_2\xi_5.$$

Ersetzt man hier ξ_7^2 und $\xi_5\xi_7$ durch ihre linearen Ausdrücke, so folgt durch Vergleichung

$$\alpha_1\alpha_3 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1\beta_3 = \gamma_3, \quad \alpha_1\gamma_3 + \beta_1\gamma_2 = 0$$

oder

$$\gamma_1 = -\alpha_1\alpha_3, \quad \gamma_2 = \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = -\beta_1\beta_3.$$

Dasselbe Resultat würde sich aus der zweiten und dritten Gleichung ergeben haben. Wir bekommen also

$$\begin{aligned}\xi_5^2 &= \alpha_1\xi_7 + \beta_1\xi_5 - \alpha_1\alpha_3,\\ \xi_5\xi_7 &= \alpha_1\beta_3,\\ \xi_7^2 &= \alpha_3\xi_7 + \beta_3\xi_5 - \beta_1\beta_3.\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist jetzt eine nothwendige Folge der beiden ersten. α_1 muss vom ersten, β_3 vom dritten Grade sein; der Grad von β_1 ist höchstens gleich 1, der von α_3 höchstens gleich 2.

Indem wir jetzt ξ_7 eliminiren, bekommen wir die Gleichung zwischen

ξ_3 und ξ_5:

$$\xi_5^3 - \beta_1 \xi_5^2 + \alpha_1 \alpha_3 \xi_5 - \alpha_1^2 \beta_3 = 0.$$

Sie kann die ursprüngliche zwischen x und y ersetzen. Denn einerseits sind ξ_3, ξ_5 rational in x, y. Andrerseits lassen sich zunächst diejenigen Functionen, die nur an der ausgezeichneten Stelle unendlich werden, sämmtlich darstellen in der Form

$$\alpha \xi_7 + \beta \xi_5 + \gamma.$$

Da nun ξ_7 rational in ξ_3 und ξ_5 ist, so lassen sich alle diese Functionen rational durch ξ_3 und ξ_5 ausdrücken. Daraus folgt aber sofort, dass alle rationalen Functionen von x, y, somit auch x, y selbst, rational durch ξ_3 und ξ_5 ausdrückbar sind.*)

Da α_1, β_1 lineare Functionen von ξ_3 sind, während α_3 vom zweiten, β_3 vom dritten Grade ist, so enthält die Gleichung zwischen ξ_5 und ξ_3 elf Coefficienten. Man kann nun zunächst einen Coefficienten dadurch wegschaffen, dass man ξ_5 durch $\xi_5 + \varkappa \alpha_1$ ersetzt und die Constante $\varkappa$ zweckmässig wählt. Es lässt sich auf diese Weise bewirken, dass die lineare Function β_1 durch eine Constante ersetzt wird.

Ferner darf man ξ_3 durch α_1 ersetzen, wodurch zwei weitere Constanten wegfallen. Endlich kann man noch zwei Constanten entfernen, indem man ξ_5 durch $\lambda \xi_5$, ξ_3 durch $\mu \xi_3$ ersetzt, und λ, μ passend wählt. Die so reducirte Gleichung enthält dann nur noch sechs wesentliche Constanten.

Wir denken uns nun umgekehrt eine Gleichung der Form

$$\eta_1^3 - \beta_1 \eta_1^2 + \alpha_1 \alpha_3 \eta_1 - \alpha_1^2 \beta_3 = 0$$

gegeben, in der $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ ganze Functionen von ξ sind, von denen α_1 wirklich vom ersten, β_3 vom dritten Grade ist, während β_1 vom ersten, α_3 vom zweiten Grade sein kann, aber auch von niedrigerem Grade. Die Gleichung kann, für hinlänglich grosse Werthe von ξ, aufgelöst werden, indem

$$\xi = t^{-3}, \quad \eta_1 = \varkappa_0 t^{-5} + \varkappa_1 t^{-4} + \cdots$$

gesetzt wird. Der erste Coefficient $\varkappa_0$ bestimmt sich durch die Bedingung

$$\varkappa_0^3 = m^2 n,$$

*) [Vgl. Bd. IV S. 216–217 dieser Ausgabe.]

wenn m den Coefficienten von ξ in α_1, n den von ξ_3 in β_3 bedeutet. Durch dieses Functionenpaar sind alle Werthepaare $(\xi\eta)$ gegeben, die der Gleichung genügen, und bei denen ξ dem absoluten Betrage nach einen bestimmten Werth überschreitet. Die Gleichung besitzt mithin nur ein unendlich fernes Element, und zwar wird ξ von der dritten, η von der fünften Ordnung unendlich. Man kann daher ξ als ξ_3, η als ξ_5 annehmen. Setzt man nun

$$\zeta = \frac{\alpha_1 \beta_3}{\eta},$$

so ist, da α_1 an der unendlich fernen Stelle von der dritten, β_3 von der neunten Ordnung unendlich wird, η aber von der fünften, ζ offenbar eine Function, die dort von der siebenten Ordnung unendlich gross wird.

Nach dem Ausdruck für ζ wäre nicht ausgeschlossen, dass ζ auch für $\eta = 0$ unendlich gross würde. Nimmt man aber die Gleichung zwischen ξ und η zu Hülfe, so kann man die Formel aufstellen

$$\zeta^2 = \alpha_3 \zeta + \beta_3 \eta - \beta_1 \beta_3,$$

aus der hervorgeht, dass ζ nur gleichzeitig mit ξ und η unendlich gross werden kann. Wir dürfen also $\zeta = \xi_7$ setzen. Aus ξ_3, ξ_5 und ξ_7 können wir durch Multiplication andere Functionen ξ bilden, die von einer beliebigen Ordnung unendlich werden. Ausgenommen sind nur die Ordnungszahlen 1, 2 und 4. Die Gleichung zwischen ξ und η ist demnach nicht von höherem als dem dritten Range.

Wir setzen noch $\alpha_1 = \xi$, $\eta = \xi\xi'$. Dann verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\xi\xi'^3 - \beta_1 \xi'^2 + \alpha_3 \xi' - \beta_3 = 0.$$

β_1, α_3 und β_3 sind ganze Functionen von ξ; β_1 vom ersten, α_3 vom zweiten, β_3 vom dritten Grade. Von der vierten Dimension ist nur das Glied $\xi\xi'^3$. Fasst man das durch die Gleichung dargestellte Gebilde als eine Curve auf, so stellt die Gleichung

$$\xi\xi'^3 = 0$$

die Asymptotenrichtungen dar; aus ihr ist ersichtlich, dass die Curve im Unendlichen eine Wendetangente hat. Da jede Curve vierten Grades Wendetangenten aufweist, so braucht man, um diese Form zu erhalten, nur eine

Projection der Art zu machen, dass der Berührungspunkt der Wendetangente ins Unendliche fällt, und kann daher sagen: Unsere Gleichung entspringt aus der allgemeinen Gleichung vierten Grades zwischen zwei Veränderlichen.

Nicht jede Gleichung dritten Ranges kann in dieser Weise transformirt werden. Wir betrachten jetzt den Fall, wo ξ_3 und ξ_4 existiren, aber ξ_1, ξ_2 und ξ_5 fehlen. Jede Function, die nur an der ausgezeichneten Stelle unendlich wird, muss sich in der Form

$$\xi = \alpha\xi_4^2 + \beta\xi_4 + \gamma$$

darstellen, wo α, β, γ ganze Functionen von ξ_3 sind. Die Grade dieser drei Functionen sind wieder dadurch bestimmt, dass eins der drei Producte $\alpha\xi_4^2$, $\beta\xi_4$, γ von derselben Ordnung sein muss wie ξ, die beiden anderen von niedrigerer. Setzt man also

$$\xi_3^3 = \alpha\xi_4^2 + \beta\xi_4 + \gamma,$$

so muss diese Gleichung erfüllt werden können, indem für α eine ganze Function ersten, für β eine Function zweiten, und für γ eine Function vierten Grades von ξ_3 gesetzt wird. Die Gleichung enthält demnach zehn willkürliche Coefficienten. Man kann aber noch eine Transformation vornehmen, durch welche die Anzahl der Coefficienten um 5 erniedrigt wird, indem man

$$\xi_3 = \varkappa\xi + \lambda,$$
$$\xi_4 = \mu\eta + \nu\xi + \varrho$$

einführt und $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho$ zweckmässig bestimmt. Es sind also nur fünf wesentliche Constanten vorhanden. Dies ist eine speciellere Form der Gleichung vierten Grades; die Curve hat eine Wendetangente, die zugleich Doppeltangente ist.

Es bleibt nur noch der Fall übrig, wo ξ_2 existirt, ξ_1, ξ_3 und ξ_5 aber fehlen. Jede Function, die nur an der ausgezeichneten Stelle unendlich wird, lässt sich hier auf die Form

$$\alpha\xi_7 + \beta$$

bringen, wo α und β ganze Functionen von ξ_2 sind. Es besteht also eine quadratische Gleichung

$$\xi_7^2 = \alpha\xi_7 + \beta,$$

wo α höchstens vom dritten, β aber nothwendig vom siebenten Grade ist. Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$\left(\xi_7 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta'$$

schreiben, wo β' ebenfalls vom siebenten Grade in ξ_2 ist, und nun ξ_7 für $\xi_7 - \frac{\alpha}{2}$ setzen. Dadurch ergiebt sich als dritte Form

$$\xi_7^2 = a\xi_2^7 + b\xi_2^6 + \cdots,$$

wie denn überhaupt immer, wenn eine Function ξ_2 existirt, die Gleichung auf die Normalgleichung des hyperelliptischen Gebildes zurückführbar ist. Diese Gleichung enthält wiederum nur fünf wesentliche Constanten.

ANMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung hat Herr F. Schottky unter Benutzung eines Theiles der von Weierstrass im Winter-Semester 1873—74 über die Theorie der Abelschen Functionen gehaltenen Vorlesung ausgearbeitet.

K.

ZUR INTEGRATION DER HYPERELLIPTISCHEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Zusatz zu der in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 17. Februar 1862 gelesenen Abhandlung.)

Ohne das Abel'sche Theorem vorauszusetzen, kann man die Integrale der in der genannten Abhandlung*) behandelten Differential-Gleichungen

$$(1.) \qquad \sum_{\nu} \frac{dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} = 0, \quad \sum_{\nu} \frac{x_\nu\, dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} = 0, \quad \ldots \quad \sum_{\nu} \frac{x_\nu^{\varrho-1}\, dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots \varrho)$$

folgendermassen erhalten.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt, wenn x eine willkürliche Grösse und $f(x)$ eine beliebige ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet,

$$\sum_{\nu} \frac{f(x_\nu)\, dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} = 0.$$

Bezeichnet man nun

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_\varrho)$$

mit $F(x)$ und nimmt

$$f(x) = \frac{F(x)}{(x-x_\lambda)(x-x_\mu)},$$

unter λ, μ irgend zwei der Zahlen $0, 1, \ldots \varrho$ verstehend, so hat man $f(x_\nu) = 0$, wenn ν sowohl von λ als von μ verschieden ist, und

$$f(x_\lambda) = \frac{F'(x_\lambda)}{x_\lambda - x_\mu}, \qquad f(x_\mu) = \frac{F'(x_\mu)}{x_\mu - x_\lambda},$$

und daher

$$\frac{f(x_\lambda)\, dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} + \frac{f(x_\mu)\, dx_\mu}{\sqrt{R(x_\mu)}} = 0$$

---

*) [Vgl. Bd. I S. 267–273 dieser Ausgabe.]

oder

$$\frac{F'(x_\lambda)\,dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} = \frac{F'(x_\mu)\,dx_\mu}{\sqrt{R(x_\mu)}}.$$

Es ergeben sich also aus den Gleichungen (1.) die folgenden:

$$(2.) \qquad \frac{F'(x_0)\,dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} = \frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = \cdots = \frac{F'(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}.$$

Aus der Gleichung

$$F(x_\lambda) = 0$$

folgt nun

$$F'(x_\lambda)\,dx_\lambda + (dF(x))_{x=x_\lambda} = 0,$$

wo sich das Zeichen d, wie überall, auf die in den Coefficienten von $F(x)$ enthaltenen Grössen $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$, nicht auf die von denselben ganz unabhängige Grösse x bezieht. Ferner sei

$$G(x) = F(x) \cdot \sum_\nu \frac{\sqrt{R(x_\nu)}}{(x_\nu - x)\,F'(x_\nu)},$$

so ist

$$G(x_\lambda) = -\sqrt{R(x_\lambda)}, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \varrho)$$

und somit

$$\left(\frac{dF(x)}{G(x)}\right)_{x=x_\lambda} = \frac{F'(x_\lambda)\,dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}}.$$

Vermöge der Gleichungen (2.) hat also

$$\frac{dF(x)}{G(x)}$$

für $x = x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ denselben Werth, der mit g bezeichnet werde. Dann besteht die Gleichung

$$dF(x) - g\,G(x) = 0$$

für $x = x_0, x_1, \ldots x_\varrho$, woraus, da sie nur vom ϱ^{ten} Grade ist, folgt, dass sie für jeden Werth von x gelten muss.

Die Gleichung

$$G^2(x) - R(x) = 0$$

ferner besteht ebenfalls für $x = x_0, x_1, \ldots x_\varrho$; folglich muss der Ausdruck auf der Linken durch $F(x)$ theilbar sein, so dass, wenn man

$$G^2(x) - R(x) = F(x)\,F_1(x)$$

setzt, $F_1(x)$ eine ganze Function von x ist, und zwar vom ϱ^{ten} oder $(\varrho+1)^{\text{ten}}$

Grade, jenachdem $R(x)$ den Grad $2\varrho+1$ oder $2\varrho+2$ hat. Dann ist

$$2G(x)\,dG(x) = F(x)\,dF_1(x) + F_1(x)\,dF(x),$$

$$F(x)\,dF_1(x) = 2G(x)\,dG(x) - F_1(x)\,dF(x) = G(x)\,(2\,dG(x) - g\,F_1(x)).$$

Es haben aber $G(x)$ und $F(x)$, wie aus der Gleichung

$$G^2(x) - R(x) = F(x)\,F_1(x)$$

erhellt, keinen gemeinsamen Theiler, und es muss daher

$$2\,dG(x) - g\,F_1(x)$$

durch $F(x)$ theilbar sein. Ist nun die Function $R(x)$ vom $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grade und A der Coefficient von $x^{2\varrho+2}$ in derselben, so ist $-A$ der Coefficient von $x^{\varrho+1}$ in $F_1(x)$, und man hat daher, da $G(x)$ nur vom ϱ^{ten} Grade ist,

$$2\,dG(x) - g\,F_1(x) = A\,g\,F(x).$$

Dieselbe Gleichung gilt aber auch, wenn $R(x)$ vom $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade ist; denn dann ist $A = 0$, und der Ausdruck auf der Linken kann, da $F_1(x)$ vom ϱ^{ten} Grade ist, nicht anders durch $F(x)$ theilbar sein, als wenn er für jeden Werth von x verschwindet. Mithin erhält man

$$dF_1(x) = A\,g\,G(x) = A\,dF(x),$$

$$d(F_1(x) - A\,F(x)) = 0,$$

d. h. es ist $F_1(x) - A\,F(x)$ eine ganze Function von x, deren aus den Grössen $x_0, x_1, \ldots x_\varrho, \sqrt{R(x_0)}, \sqrt{R(x_1)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$ zusammengesetzte Coefficienten in Folge der Gleichungen (1.) sämmtlich Constanten sind. Da nun

$$\frac{G^2(x)}{F(x)} - \frac{R(x)}{F(x)} - A\,F(x) = F_1(x) - A\,F(x),$$

so ist folgender Satz bewiesen:

Wenn zwischen $(\varrho+1)$ veränderlichen Grössen $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ die Differential-Gleichungen (1.) bestehen, und man setzt, unter x eine von $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ unabhängige willkürliche Grösse verstehend,

$$F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_\varrho),$$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt{R(x_0)}}{(x_0-x)\,F'(x_0)} + \frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x)\,F'(x_1)} + \cdots + \frac{\sqrt{R(x_\varrho)}}{(x_\varrho-x)\,F'(x_\varrho)},$$

so ist

$$\frac{G^2(x)}{F(x)} - \frac{R(x)}{F(x)} - AF(x)$$

eine ganze Function von x, welche sich nicht mit $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ ändert, so dass alle ihre Coefficienten, welche aus den Grössen

$$x_0, x_1, \ldots x_\varrho \quad \text{und} \quad \sqrt{R(x_0)}, \sqrt{R(x_1)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$$

rational zusammengesetzt sind, constante Werthe haben.

Ist

$$R(x) = Ax^{2\varrho+2} + A_1 x^{2\varrho+1} + \cdots,$$

und setzt man

$$s = x_0 + x_1 + \cdots + x_\varrho,$$

so hat man

$$F(x) = x^{\varrho+1} - sx^\varrho + \text{Glieder mit niedrigeren Potenzen von } x,$$

und es werden daher, wenn man $R(x)$ durch $F(x)$ dividirt, die beiden höchsten Glieder des Quotienten gleich

$$Ax^{\varrho+1} + (A_1 + As)x^\varrho.$$

Daraus folgt mit Rücksicht darauf, dass $G^2(x)$ vom $(2\varrho)^{\text{ten}}$ Grade ist,

$$\frac{G^2(x)}{F(x)} - \frac{R(x)}{F(x)} - AF(x) = -2Ax^{\varrho+1} - A_1 x^\varrho + F_2(x),$$

wo $F_2(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist. Entwickelt man dieselbe und bezeichnet ihre Coefficienten mit $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$, so sind

$$P_1 = c_1, \quad P_2 = c_2, \quad \ldots \quad P_\varrho = c_\varrho,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten sollen, die ϱ Integrale der aufgestellten Differential-Gleichungen. Da sich nun, wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ ϱ willkürlich gewählte, bestimmte Werthe von x bezeichnen, die P linear durch $F_1(\xi_1), F_2(\xi_2), \ldots F_2(\xi_\varrho)$ ausdrücken lassen, so kann man diese Integrale auch durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{G^2(\xi_1)}{F(\xi_1)} - \frac{R(\xi_1)}{F(\xi_1)} - AF(\xi_1) = C_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{G^2(\xi_\varrho)}{F(\xi_\varrho)} - \frac{R(\xi_\varrho)}{F(\xi_\varrho)} - AF(\xi_\varrho) = C_\varrho,$$

wo $C_1, C_2, \ldots C_\varrho$ ebenfalls willkürliche Constanten bedeuten.

Diesen Satz hat auf andere Weise Richelot bewiesen (Crelle's Journal, Bd. 25, S. 107, Theorem (3)).

ANHANG.

ÜBER DIE SOKRATISCHE LEHRMETHODE UND DEREN ANWENDBARKEIT BEIM SCHULUNTERRICHTE.

(Der wissenschaftlichen Prüfungscommission zu Münster vorgelegt im Frühjahr 1841. Abgedruckt im Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone vom Herbst 1844 bis zum Herbst 1845.)

Bei der Bearbeitung des vorliegenden, bereits vor längerer Zeit auf äussere Veranlassung geschriebenen Aufsatzes*) wurde ich durch das Bemühen, die Eigenthümlichkeit und das wahre Wesen der nach Sokrates benannten Lehrmethode zu einer klareren und lebendigeren Anschauung zu bringen, als die Definitionen der gewöhnlichen pädagogischen Compendien zu geben vermögen, darauf hingeführt, zunächst die Art und Weise, in der sie von jenem trefflichen Philosophen selbst in Anwendung gebracht wurde, ausführlicher darzustellen. Wir kennen die Weise des Sokrates, wie er mit den Jünglingen, die sich ihm anschlossen, und mit seinen Mitbürgern überhaupt verkehrte, aus Xenophons Schrift über ihn und aus den Dialogen des Plato. Xenophon führt uns eine Reihe einzelner Scenen aus dem Leben seines geliebten Lehrers vor, worin dieser ganz in der eigenthümlichen Haltung seines Wesens auftritt, und in Unterredungen mit den verschiedenartigsten Personen sich der Pflicht entledigt, die, wie er selbst sagt, der Gott ihm auferlegt hatte, seinen Mitbürgern rathend, ermahnend, zurechtweisend, anregend zu nützen. Die Gespräche haben grösstentheils eine praktische moralische Tendenz, und die Gegenstände sind durchaus populär behandelt. Erörterungen wissenschaft-

*) Der Aufsatz, der übrigens keinen Anspruch darauf macht, als eine den Gegenstand erschöpfende pädagogische Abhandlung zu gelten, war ursprünglich nicht für den Druck bestimmt, und nur ein zufälliger Umstand veranlasst mich, ihn gegenwärtig zu veröffentlichen, ohne dass mir die Zeit erlaubt hätte, ihn einer durchgreifenden Überarbeitung zu unterwerfen.

licher Begriffe kommen weniger in ihnen vor; deshalb sind sie auch nicht geeignet, die Sokratische Methode vollständig kennen zu lehren. Plato dagegen zeigt uns den Weisen, der sich, obwohl er bescheiden von sich bekennt, dass er nichts wisse, zur Ahnung des Höchsten und Heiligsten erhoben hat, und der einzig dafür lebt und wirkt, die vom Schein und Trug der Sinne befangenen Menschen von dem eitlen und verderblichen Trachten nach Reichthum, Macht, Wohlleben und unfruchtbarer Wortweisheit abzuziehen und für ein ernstes Streben nach dem, was ewig wahr, gut und recht ist, zu gewinnen. Das ist sein Zweck, wenn er hier die prunkende Weisheit anmassender Sophisten in ihrer Blösse zeigt, dort den jungen, nach Ehre und Auszeichnung begierigen Staatsmann aufmerksam macht auf das, wodurch er allein wahres Verdienst sich erwerben könne; wenn er nach Wahrheit strebende Jünglinge auf den Weg des rechten Forschens leitet, oder wenn er im Kreise seiner Freunde das heitere Mahl durch sinnige Gespräche würzt, sodass Flötenspieler, Tänzer und Lustigmacher darüber vergessen werden. Und diese Tendenz der Sokratischen Philosophie, glaube ich, muss man beständig im Auge halten, wenn man eine richtige Ansicht von der ihm eigenthümlichen Methode zu lehren fassen will. Es schien mir daher anfänglich nicht unangemessen, den Versuch zu machen, ob sich das Wesen der Sokratischen Methode nicht vielleicht am befriedigendsten durch eine genaue Analyse eines der Platonischen Gespräche entwickeln lassen möchte. Auch dachte ich, durch eine näheres Eingehen in die Natur der von Sokrates behandelten Gegenstände am besten zeigen zu können, welche Gegenstände sich überhaupt nach seiner Weise behandeln lassen, und so zugleich für die Beantwortung der Frage, inwiefern bei unserm jetzigen Jugendunterrichte davon könne Gebrauch gemacht werden, einige Anhaltspunkte zu gewinnen. Ich versuchte es mit dem Menon, weil dieses Gespräch oftmals als ein schönes Muster der Sokratischen Methode empfohlen wird; und mit dem Theätetos, der mir vorzüglich geeignet dazu erschien, nicht nur, weil hier Sokrates in der Unterredung mit seinem jungen Freunde von seiner Art zu lehren eine sehr klare Anschauung giebt, sondern sich auch über diese seine »μαιευτικὴν τέχνην« mehrfach selbst ausspricht. Aber ich fand bald, dass eine solche Zergliederung eines Dialogs von dem »göttlichen Weisen«, sollte sie befriedigend ausfallen, eine etwas längere und vertrautere Bekanntschaft mit den Werken desselben

voraussetzt, und überdies nicht durchzuführen sein dürfte, ohne in Erörterungen, die für den beabsichtigten Zweck zu umständlich sein würden, einzugehn. Denn einmal kann ein Werk von Plato nicht füglich völlig verstanden werden, wenn es nicht in seinem Zusammenhange mit den übrigen betrachtet wird; und dann würde überhaupt auf die behandelten Gegenstände selbst mehr Rücksicht genommen werden müssen, als mit der Absicht, bloss den Begriff der Sokratischen Methode auf diesem Wege zu entwickeln, verträglich sein möchte. Ich werde mich daher auf einige Andeutungen über die Ansicht, die ich auf dem angegebenen Wege von der Sokratischen Methode gewonnen habe, beschränken müssen. Einige Bemerkungen über das Wirken des Sokrates und den Geist seiner Lehre überhaupt scheinen mir aber nöthig zu sein, weil seine Methode in innigem Zusammenhange damit steht.

Sokrates unterschied sich in mancherlei Hinsicht von den übrigen Jugendlehrern und sogenannten Weisen seiner Zeit. Nach den Perserkriegen, seit welchen die Cultur in Griechenland so herrliche Fortschritte machte, regte sich bei der griechischen Jugend, besonders der athenischen, das Verlangen nach einer höhern Bildung, als sie Waffenübungen und Gymnastik zu geben vermochten. Namentlich fühlten diejenigen, welche im Staate etwas gelten, als Redner in der Volksversammlung oder vor Gericht auftreten wollten, das Bedürfniss eines entsprechenden Unterrichts. So kam es, dass sich bald eine grosse Menge von Leuten einfand, welche gegen angemessene Belohnung alles das zu lehren sich erboten, was jeder für sich erspriesslich halten mochte, und dass die jungen Männer in Schaaren ihnen zuströmten. Es war natürlich, dass besonders eifrig die Redekunst betrieben wurde als das unentbehrlichste Mittel, im Staate sich auszuzeichnen und zu Einfluss zu gelangen, wie denn auch viele zu Sokrates kamen, damit er sie in der Kunst »zu herrschen über die Menschen« unterrichte. Aber freilich ward nicht sowohl gelehrt, durch die Kraft der Rede zu überzeugen und die Herzen der Menschen für das Rechte und Grosse zu gewinnen, als die Menge zu überreden und für die ehrgeizigen Zwecke des gewandten Sprechers zu leiten. Dabei suchte man dann eine vorzügliche Stärke darin, den Gegner durch Trugschlüsse zu verwirren, und alles, Wahres und Falsches, nach Bedürfniss und Laune zu behaupten und zu bestreiten. Und auch über alle übrigen menschlichen und göttlichen Dinge wussten diese weisen Männer auf Verlangen Auskunft zu

geben. Wirklich hatten sie aus der Schule der Eleatischen Naturphilosophen, von denen schon damals viele sich trefflich darauf verstanden, »den Geist in ein tönendes Wort zu kerkern«, eine Menge prächtig klingender Formeln mitgebracht, die sie ihren erstaunten Zuhörern einprägten, sodass diese nun vermeinten, den Schlüssel zu aller Erkenntniss zu besitzen. Dem Treiben dieser Menschen, und deren sogenannter, alles sittlichen Grundes entbehrenden Weisheit trat zuerst Sokrates mit Ernst und der überlegenen Kraft, welche die Wahrheit verleiht, entgegen. Mit Recht erkannte er in ihnen die heillosesten Verderber der Jugend, weil sie das erwachte Bedürfniss einer höhern Geistesbildung für ihre selbstsüchtigen Zwecke missbrauchten, und gleich so vielen ihrer Nachfolger dem Geiste ihrer Zeit, statt ihm durch besonnenes und kräftiges Eingreifen die Richtung auf ein würdiges Ziel zu geben, sklavisch dienend sich an der Menschheit versündigten, um nur selbst Ansehen bei der Menge und — Geld zu gewinnen. Es gehört nicht hieher, darzustellen, wie glänzend Sokrates den Kampf mit den Sophisten bestand; wie er die Leerheit der Weisheit, deren sie sich rühmten, aufdeckte; wie er ihre künstliche Dialektik niederschlug; wie er selbst ihre Redekunst, durch die sie am meisten galten, in ihrer Nichtigkeit darstellte, weil sie nicht auf dem festen Grunde der Wahrheit ruhete. Ich will nur in wenigen Zügen anzudeuten versuchen, wie er selbst mit den Jünglingen, welche die Sophisten verliessen und sich ihm anschlossen, zu verfahren pflegte, um sie auf den rechten Weg zur Wahrheit und zur Tugend zu führen.

Das erste, was er that, war gewöhnlich, dass er sie zu der Überzeugung brachte, wie sie von allem, was dem Menschen das Wissenswürdigste sein müsste, noch nichts wüssten. Denn den Dünkel, schon recht vieles zu wissen und über die wichtigsten Dinge im Klaren zu sein, hielt er für das grösseste Hinderniss der Weisheit, die Erkenntniss der eigenen Unwissenheit dagegen als den Anfang derselben. Bekannte er doch von sich selbst, nichts zu wissen. »Nicht als ob — sagt Stolberg — er sagen wollte, dass er mitten unter eleganten Zeitgenossen ein Idiot wäre; aber innig durchdrungen von dem Gefühle der hienieden gehemmten Kräfte; voll von Bedürfnissen, welche die Weisheit, wie sie gäng und gebe war, nicht befriedigen konnte; hoch auf den Flügeln der Ahnung gehoben, achtete er, gegen diese Ahnung, das menschliche Wissen satter Sophisten so viel als nichts«. Diese Ansicht des

Sokrates von der Nichtigkeit des menschlichen Wissens, wohl zumeist hervorgegangen aus seinem fruchtlosen Bemühen während eines guten Theils seines Lebens, über so viele Fragen, die seinen herrschenden Geist beschäftigten, bei den berühmtesten Weisen seiner Zeit befriedigende Aufschlüsse zu erlangen — diese Ansicht darf nicht übersehen werden, wenn man den Geist seiner Lehre richtig auffassen will.

Sokrates fand aber nicht bloss nöthig, gegen den Dünkel des Wissens anzukämpfen, sondern noch manche andere Hindernisse der Empfänglichkeit musste er erst aus den Gemüthern wegtilgen, ehe er den Samen besserer Erkenntniss ausstreuen konnte. Gar viele von denen, welche sich seiner Leitung übergaben, waren bereits mit positiven Irrthümern behaftet, und zumal von der herrschenden Richtung, die auf Reichthum, Macht und Genuss ging, angesteckt. Manche suchten sogar bei ihm nichts anderes als bei den Sophisten; nur hofften sie es vorzüglicher von ihm zu erhalten, weil sie sahen, wie die Sophisten nicht vor ihm bestehen konnten, er also wohl weit weiser sein müsste. In der Art, wie er solche Verirrte zurechtwies, sie zur Erkenntniss ihres verkehrten Strebens führte und ihren Sinn auf das Bessere lenkte, — hierin zeigt sich vorzüglich seine unübertreffliche Kunst, die Menschen zu behandeln, gegründet auf eine tiefe Kenntniss des menschlichen Herzens und klare Durchschauung der mannigfaltigsten Lebensverhältnisse; aber auch in dem herrlichsten Lichte sein liebevolles und von der reinsten Begeisterung für das Gute und Edle beseelte Gemüth. In dieser Beziehung ist sein Verhältniss zu Alcibiades, wie es uns Plato, wenn auch wohl idealisirt, schildert, höchst interessant. Sokrates allein hatte Gewalt über diesen feurigen Geist, die dieser selbst unwillig oft empfand und doch vor ihr sich beugte. Trefflich wird dies dargestellt in der Lobrede, die Alcibiades dem Sokrates im Gastmahl hält.

Das Verfahren aber, das Sokrates befolgte, wenn er jugendliche Seelen von gefährlichen Irrthümern befreien und von verkehrten Bestrebungen abziehen wollte, war an sich höchst einfach und natürlich. Schonend und milde liess er sie gar nicht empfinden, dass er etwas Irriges und Ungehöriges an ihnen bemerkte, welches er vertilgen wollte. Er liess sich vielmehr zu ihren Ansichten herab, nur oft durch eine leise Ironie ihren Irrthum gleich Anfangs sie ahnen lassend; und durch Beispiele aus dem Bereiche ihrer

eigenen Erfahrungen sie an bestimmte, unbestreitbare und von ihnen selbst anerkannte Wahrheiten erinnernd führte er sie allmählig zur Erkenntniss des Unhaltbaren und Widersprechenden ihrer vorgefassten und oft nicht einmal recht verstandenen Meinungen. Dann pflegte er, ebenfalls allen Schein ausdrücklicher Belehrung vermeidend, ihnen fühlbar zu machen, wie sie auf dem schon betretenen oder gesuchten Wege nicht einmal das erreichen würden, nach dem sie doch strebten. Und nun erst liess er sie ahnen, es möge doch wohl etwas Besseres geben als die Güter, nach denen die bethörte Menge trachtete, und etwas Gewisseres als der äussere Schein. So entflammte er in ihren Gemüthern eine edle Begierde nach höherer Erkenntniss, und bereitete sich für die Aufnahme seiner eigenen Lehre einen empfänglichen und fruchtbaren Boden.

Denn Sokrates blieb nicht dabei stehen, falsche und verderbliche Grundsätze zu bekämpfen, und die von denselben Missleiteten von ihren Verirrungen und verkehrten Bestrebungen zurückzuführen; als den eigentlichen Beruf seines Lebens betrachtete er es vielmehr, allen, die sich seiner Führung übergaben, den Weg zur wahren, das ganze Leben durchdringenden und bestimmenden Weisheit zu zeigen. Diesen finde aber nur der, lehrte er, welcher frei von dem Wahne, die ewige Wahrheit in dem Gebiete der sinnlichen Erscheinungen entdecken zu können, auf die Regungen des Göttlichen in dem menschlichen Geiste mit frommer Seele achte, wo es sich vor allem in dem sittlichen Bewusstsein klar und verständlich ausspreche. Darum sei Selbsterkenntniss das Erste und Nothwendigste, nach dem jeder Mensch streben müsse; diese werde ihm, nachdem er das vernünftige Prinzip in den Gesetzen seines eigenen geistigen Lebens erkannt habe, zur Ahnung einer ewigen, durch die ganze Welt waltenden göttlichen Vernunft führen, in welcher alles, was ist und geschieht, seine Einheit finde, und von der das Vernünftige und Göttliche im Menschen ein Ausfluss und Abbild sei. Und in der Erkenntniss dieser höchsten Vernunft immer weiter vorzudringen, und nach ihr sein ganzes Leben einzurichten, sei die wahre Bestimmung des Menschen, in deren Verfolgung er allein seine Glückseligkeit finden könne.

Es ist hier nicht der Ort, diese Grundsätze der Sokratischen Philosophie näher zu entwickeln; ich habe bloss anzugeben, auf welche Weise er seine Lehre seinen Schülern mittheilte.

Sokrates befolgte nicht die Weise der meisten Philosophen vor ihm und nach ihm, bestimmte Wahrheiten als das Resultat angestellter Forschungen vorzutragen und in fortlaufender Rede die Gründe derselben zu entwickeln. Sein Bemühen ging vielmehr darauf hinaus, die Erkenntniss in der Seele des Lernenden nach und nach sich entwickeln zu lassen, in der Art, dass sie ihm als Produkt seiner eigenen geistigen Kraft erscheinen sollte, wenn diese auch noch zu schwach war, um ohne fremde Führung das Rechte zu finden. Darum war sein Unterricht nicht sowohl ein eigentliches Mittheilen als vielmehr ein Anregen und Beleben der geistigen Thätigkeit. Die Natur der Gegenstände, welche den Inhalt seines Unterrichts ausmachten, und die eigenthümliche Ansicht, die er von ihnen hegte, bestimmten ihn zu dieser Methode. Die Wahrheiten, für welche er die Geister gewinnen wollte, waren nicht vor der Beschaffenheit, dass er sie ihnen hätte bloss äusserlich mittheilen und einprägen können, wenn sie Bedeutung und Werth für den Empfangenden haben und nicht bloss zu leeren Formeln werden sollten, wie es selbst bei den Schülern des Pythagoras zum Theil der Fall gewesen. Sondern wie ihr Keim nach seiner festen Überzeugung in jedem menschlichen Gemüthe vorhanden war, so sollten sie auch aus diesem organisch entspriessen; und sein eigenes Geschäft dabei verglich er selbst mit den Verrichtungen der Geburtshelferinnen.

Zur nähern Bezeichnung des Geistes seiner Lehrart möge noch Folgendes dienen.

Mehrfach wird bei Plato von Sokrates die Behauptung aufgestellt, alles Lernen in seinem Sinne sei nichts als ein Sich-Erinnern. So spricht er sich unter anderm im Menon aus, und führt zum Beweise an, dass man namentlich jeden Menschen dahin bringen könne, die Sätze der Geometrie sich selbst zu entwickeln, wenn man ihn nur durch zweckmässige Fragen anleite. Er zeigt dies durch ein Beispiel an einem Sklaven, aus dem er einen geometrischen Lehrsatz herausfragt. Man führt diese Stelle oft als ein besonders passendes Beispiel seiner Methode an. Wohl nicht ganz mit Recht; denn die Sache an sich ist höchst einfach, und Sokrates bezweckt ja auch nichts weiter dadurch, als dem Menon auf eine ganz naheliegende Weise den Sinn seiner ausgesprochenen Ansicht anschaulich zu machen. Bemerkenswerth ist aber der Umstand, dass Sokrates auch hier den Sklaven, der auf die ersten

Fragen ganz keck und zuversichtlich antwortet, zunächst von seiner Unwissenheit hinsichtlich der in Frage stehenden Sache überführt, und nach dem Eingeständniss derselben den Menon darauf aufmerksam macht, wie der Sklave gerade hierdurch dem Ziele um einen bedeutenden Schritt näher gekommen sei.

Dieselbe Behauptung, dass Lernen ein Sich-Erinnern sei, findet sich im Phädon und wird dort näher erörtert. Sokrates spricht von den Ideen. Die Ideen können keine der Sinnenwelt entnommenen Vorstellungen sein, weil sie sich nirgends an einem sinnlichen Objekte vollständig realisirt finden. Darum sind sie nothwendig ursprünglich in der Seele vorhanden und in dem Wesen ihrer Natur begründet. Sokrates hält sie für Erinnerungen der Seele aus einem frühern, vollkommenern Zustande. Daraus folgt, dass der Geist auf keinem andern Wege zu ihrer Erkenntniss geführt werden kann als durch Belebung der Erinnerung.

Ich habe diese Stelle angeführt, weil sie zugleich einen Wink giebt von der Beschaffenheit der Gegenstände, die auf Sokratische Weise behandelt werden können.

Besonders lehrreich sind die Äusserungen des Sokrates über seine Methode im Theätetos. Hier vergleicht er, auf das Geschäft seiner Mutter anspielend, seine Kunst mit der Geburtshülfe, um anzudeuten, von welchem Gesichtspunkte er das Lehren betrachte. »So viel ist gewiss, — sagt er — dass die Jünglinge, die mit mir umgehen, nicht etwa von mir jemals etwas gelernt haben, sondern aus sich selbst entdecken sie viel Schönes und halten es fest. Die Geburtshülfe dabei aber leisten wir, der Gott und ich«. Als das Grösseste seiner Kunst aber rühmt er, »dass sie im Stande sei zu prüfen, ob die Seele des Jünglings etwas Missgestaltetes und Falsches zu gebären im Begriffe sei, oder etwas Gebildetes und Echtes«.

Die äussere Form der Sokratischen Methode stimmt im Wesentlichen mit der sogenannten katechetischen Lehrart überein, wenn man von dem häufigen Gebrauch der Ironie absieht, die aber auch nur für einen Mann von Sokrates Geiste ist, aber manchem von denen, die gern seine Jünger heissen möchten, gar schlecht ansteht. Lehrer und Lernender verkehren gesprächsweise mit einander; jener fragt und dieser antwortet. Der Lehrer

muss den Begriff, den er beibringen will, zuvörderst gehörig zergliedert haben, wie er sich in der Seele des Lernenden erzeugen lässt. Darnach richtet er seine Fragen ein, die immer von der Art sein müssen, dass sie jener nach dem, was er schon weiss, beantworten kann, wenn er nur seine geistige Kraft, so weit sie schon entwickelt ist, gehörig braucht. Erfolgt eine unrichtige Antwort, so wird sie nicht unmittelbar von dem Lehrer berichtigt, sondern der Lernende wird durch neue Fragen dahin geführt, sie selbst zu verbessern. Die Kunst des Lehrers besteht hauptsächlich darin, dass er den Gedankengang des Lernenden zu verfolgen und hiernach seine Fragen zu stellen weiss, und dass er nicht beim Berichtigen der falschen Antworten sein eigentliches Ziel aus den Augen verliert, sondern immer wieder gehörig einzulenken versteht. Sokrates bediente sich der katechetischen Form durchgehends, und war vollendeter Meister darin. Wie man sich der jugendlichen Fassungskraft anschmiegen müsse, davon wird unter andern im Euthydemos ein schönes Beispiel gegeben im Gegensatze zu dem Verfahren zweier Sophisten, deren Weisheit sich darin gefiel, die Gemüther in Verwirrung zu setzen.

Es scheint aber, als ob man nicht selten die katechetische Form mit dem Wesen der Sokratischen Methode überhaupt verwechselt, und Katechetik und Sokratik gewissermassen für ein und dasselbe gehalten habe. Wenigstens waren in diesem Irrthume alle die befangen, welche den Jugendunterricht durchaus in Sokratischer Methode ertheilt haben wollten. Allerdings wird beim Elementar-Unterrichte die katechetische Form immer vorwalten müssen; es bezieht sich aber hier das Katechisiren, abgesehen davon, dass es zum Theil bloss prüfend und wiederholend ist, meistentheils auf einen gegebenen äussern Stoff, der für die Fassungskraft des Schülers zergliedert wird. Selbst wenn eine solche Übung einzig die Weckung und Stärkung der geistigen Kräfte zum Zweck hat, so ist das doch noch keineswegs Sokratik. Das Wesen derselben glaube ich vielmehr nach dem Vorhergehenden etwa so aussprechen zu können.

Diejenigen Erkenntnisse, welche entweder ihre Quelle unmittelbar in den Anlagen der menschlichen Natur haben, oder aus bereits vorhandenen Vorstellungen, Begriffen und Ideen abgeleitet werden können, lässt die Sokratische Methode den Lehrling durch eigene Geistesthätigkeit auffinden und gewissermassen erzeugen. Es geschieht dies unter der beständigen Führung des

Lehrers, der nicht nur die Geistesthätigkeit anregt, sondern auch fortwährend leitet und bestimmt.

Ich bemerke noch, dass es nicht richtig ist, wenn man zuweilen den Zweck der Sokratischen Methode darauf beschränkt, dass sie denken lehren solle. Allerdings übt sie die Denkkraft in ausgezeichneter Weise, weil sie ja alles auf dem Wege der Reflexion hervorgehen lässt. Aber sie hat keineswegs eine bloss formale Tendenz, sondern es soll durch sie jedesmal ein bestimmtes Resultat erreicht werden, das dem Geiste als sein Eigenthum verbleibt, und es soll dieser gerade dadurch, dass er reicher wird an Ideen, also an wahrem Wissen, auch intensiv an Kraft gewinnen; so wie auch der leibliche Organismus, wie er im Wachsthume fortschreitet, zugleich an innerer Lebenskraft zunimmt. Wenn daher Jemand sagt: »die Sokratische Methode lehrt denken, aber nicht wissen« — so muss einer solchen Behauptung ein seltsamer Begriff vom Wissen zum Grunde liegen.

Mehrere Schriftsteller unterscheiden zwischen Sokratischer und heuristischer Methode. Als Hauptunterschied beider wird angegeben, dass bei der heuristischen eigentlich der Schüler der Thätigste sei, unter der wissenschaftlichen Aufsicht des Lehrers; bei der Sokratischen dagegen seine Thätigkeit weit mehr von der Thätigkeit des Lehrers abhängig erhalten werde. Bei jener gehe nämlich der Schüler ganz seinen eignen Weg, auf den der Lehrer nur in der Art zu achten habe, dass er kein Irrgang werde; bei dieser müsse er sich auf dem Wege fortbewegen, den ihm der Lehrer vorzeichnet; bei der heuristischen entwickle also der Schüler seine Schlüsse aus dem Innern; bei der Sokratischen werde ihm durch des Lehrers Fragen immer vorgehalten, woraus er schliessen solle; oft schliesse sogar der Lehrer versteckter Weise für ihn. (S. die Erläuterungen zu dem Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht in der Mathematik von Matthias.)

Diese Bemerkungen scheinen jedoch weniger das Wesen der Sokratischen Methode als deren Form zu treffen. Ihr Prinzip ist ja auch eben, den Schüler so viel als möglich selbst finden zu lassen, was er lernen soll. Es handelt sich hier nur darum, wie weit die eigene Geistesthätigkeit des Schülers gehen könne, und in welcher Art der Lehrer einzugreifen habe. Darüber lässt sich aber nicht wohl im Allgemeinen etwas festsetzen; die Natur des Lehrgegenstandes, der Grad der Vorbildung des Schülers, die Virtuosität des

Lehrers und andere zufällige Umstände müssen darüber entscheiden. Wollte man aber hiernach einen Unterschied zwischen Sokratischer und heuristischer Methode machen, so möchte sich die Grenzscheide schwer bestimmen lassen. Mehr Bedeutung hat die Bemerkung, dass bei der Sokratischen Weise der Schüler nicht gleich anfangs sehe, wie und woraus er sein Resultat finden werde, während bei der heuristischen das Ziel in heller Nähe vor ihm liege. Wo sich das Letztere erreichen lässt, kann es allerdings für den Erfolg des Unterrichts nicht anders als höchst förderlich werden; bei mathematischen Gegenständen lässt es sich in manchen Fällen am ersten bewerkstelligen.

Der Sokratischen Methode gegenüber — jedoch keineswegs entgegen — steht die sogenannte akroamatische Lehrform. Der Lehrer entwickelt hier in zusammenhängender Rede seinen Gegenstand den Schülern, deren Thätigkeit auf ein gehöriges Auffassen, Überdenken und Einprägen des Vorgetragenen angewiesen ist. Gewisse pädagogische Schriftsteller haben ihren Witz daran geübt, diese Lehrart lächerlich zu machen. Trapp nennt sie die Professor-Methode und meint, da schütte der Lehrer aus seinem vollen Magazine nur immer in den leeren Kopf des Schülers hinein, unbekümmert, ob die Saat dem Boden angemessen, ob des Samenkorns auch zu viel, ob auch gerade jetzt die rechte Saatzeit sei. Es ist leicht, gegen eine Sache zu reden, wenn man nur ihren Missbrauch im Auge hat. So viel ist gewiss, der akroamatische Vertrag setzt, wenn er von Erfolg sein soll, Schüler von bereits reiferm Geiste voraus. Wenn aber ihrerseits die Fähigkeit vorhanden ist, einer längern Rede gehörig zu folgen, sie im Einzelnen und Ganzen richtig aufzufassen, und das Gehörte auf die rechte Art zu verarbeiten; wenn sie bereits ein gewisses wissenschaftliches Interesse fühlen, das sie die erforderliche Anstrengung nicht scheuen lässt, wenn dann auch der Lehrer mit den nöthigen Eigenschaften ausgerüstet ist, seines Gegenstandes vollkommen Meister ist, die Gabe einer klaren Entwicklung besitzt, mit Leichtigkeit, Präcision und angemessener Lebendigkeit zu reden weiss: — dann dürfte in manchen Fällen der zusammenhangende Vortrag den Vorzug vor jeder andern Unterrichtsform behaupten, und selbst als formales Bildungsmittel sehr an seiner Stelle sein. Ich rede hier noch nicht von den Fällen, wo er durch die Natur des Gegenstandes oder aus pädagogischen und andern Gründen nothwendig wird; ich betrachte ihn nur an sich. Die klare Überschauung

des Gegenstandes, die durch den akroamatischen Vortrag möglich wird, wenn er gehörig eingerichtet ist; der sachgemässe ununterbrochene Fortschritt, der ihm eigen ist; das Interesse, welches schon die Form der Darstellung zu erregen vermag: alles dies sichert ihm unstreitig eigenthümliche Vorzüge. Und dann, wer sollte verkennen, welche bildende Kraft an sich schon in einem trefflichen Vortrage liegt? Zumal wenn nicht nur der Verstand, sondern auch das Gemüth in Anspruch genommen, wenn nicht nur das Wissen bereichert, sondern auch auf die Gesinnung gewirkt werden soll; so möchte wohl von einer zusammenhangenden, Geist und Leben athmenden Rede der stärkste und dauerndste Eindruck zu erwarten sein.

Dann ist es aber auch noch ein höchst bedeutender Vortheil der akroamatischen Lehrform, dass sie dem Lehrer Gelegenheit giebt, dem Schüler Muster wissenschaftlicher Behandlung und Forschung darzulegen. Nichts ist bildender für den aufstrebenden Geist als die Betrachtung des Weges, den ein schon mehr ausgebildeter bei seinen Unterschungen nimmt. Wenn also der Lehrer die Kunst versteht, nicht bloss Resultate mitzutheilen und a posteriori zu begründen, sondern die ganze Gedankenfolge, die zu ihnen geführt hat, anschaulich zu machen, so darf er zumal bei schon vorgeschrittenen Schülern eines guten Erfolges sicher sein. Ich finde von F. A. Wolf die Bemerkung, der philologische Lehrer würde wohl thun, den Schülern der obern Klassen zuweilen in einem Mustervertrage zu zeigen, »wie ein alter Klassiker studirt und aufgefasst werden müsse«. Ein Ähnliches gilt von den übrigen Lehrgegenständen. Vormachen hilft mehr als Vorsagen.

Es bleibt nun noch übrig, die Gegenstände näher anzugeben, für welche sich die Sokratische Methode eignet, und welche eine andere Behandlungsweise entweder nöthig oder doch unter bestimmten Verhältnissen räthlich machen. Ich muss mich jedoch auf einige Andeutungen beschränken, da eine vollständige Ausführung die vorgeschriebenen Grenzen dieses Aufsatzes überschreiten würde.

Wenn ich in dem Vorhergehenden den Begriff der Sokratischen Methode richtig bestimmt habe, so sind dadurch im Allgemeinen zugleich die Grenzen gezogen, innerhalb welcher sie ihre Anwendung finden kann. Ausgeschlossen durch ihren Begriff bleibt sie von dem Gebiete des historischen Wissens im weitesten Sinne des Worts und der Real-Disciplinen. Als ihr eigenthümliches

Feld sind also die philosophischen Wissenschaften, die reine Mathematik und die Theorie der allgemeinen Gesetze der Sprache zu betrachten. Hiermit soll aber keineswegs behauptet werden, dass sie bei diesen Gegenständen unter allen Umständen durchaus nothwendig oder auch nur zweckmässig sei. Denn die Frage nach dem Umfange ihrer Anwendbarkeit gewinnt eine andere Gestalt, sobald man untersucht, inwiefern der Jugendunterricht in den Schulen Gebrauch davon machen könne. Hier fallen sogleich einige äussere Umstände in die Augen, welche die Grenzen ihrer Anwendbarkeit um ein Bedeutendes verengen.

Die Sokratische Methode kann auch bei den ihr an sich ganz angemessenen Gegenständen ihren Erfolg völlig nur dann haben, wenn der Lehrer nur einen oder doch nur sehr wenige Schüler vor sich hat. Ich sehe von allen übrigen Hindernissen, die der Lehrer in einer gefüllten Klasse findet, ganz ab, und bemerke nur dieses. Während der Lehrer mit einem Schüler verkehrt, — und bei wahrer Sokratischer Methode ist es doch nöthig, dass die Untersuchung mit einem wo nicht zu Ende, doch zu einem bestimmten Abschlusse geführt werde — geht ein grosser Theil seines Unterrichts für die übrigen Schüler verloren. Es ist in manchen Fällen für den Schüler zu schwer, das Gespräch, welches der Lehrer mit einem andern hält, gehörig zu verfolgen. Dazu müsste er sich ganz in den Gedankengang des letztern hineinfinden können, was oft für den Lehrer schwer genug ist. Oft würde er auch selbst ganz anders geantwortet haben; dann vermengt er seine Gedanken mit denen des andern und geräth in Verwirrung; hat er einmal den Faden verloren, so ist alle Aufmerksamkeit dahin.

Die Sokratische Methode in ihrem wahren Geiste durchgeführt passt weniger für Knaben als für reifere Jünglinge. Zumal die Gegenstände, welche die geeignetsten für sie sind, diejenigen, über welche des Sokrates eigener Unterricht sich erstreckte, gehören nicht für das Knabenalter. Überhaupt darf man nicht vergessen, dass es griechische, schon auf einer nicht unbedeutenden Stufe der Bildung stehende Jünglinge waren, die Sokrates vor sich hatte.

Nicht minder erfordert die Sokratische Methode einen Lehrer von ausgezeichnetem Talente. Wer in Sokrates Weise unterrichten will, muss auch von Sokrates Geiste etwas in sich tragen. Mancher Lehrer aber, der auf

seinem Wege, welchen er sich seiner Individualität gemäss selbst gebahnt hat, Tüchtiges leistet, würde sich nur schwer in einer ihm nicht natürlichen Form bewegen.

Aus diesen Bemerkungen möchte wohl der Schluss zu ziehen sein, dass bei dem Schul-Unterrichte die Sokratische Methode weder die allgemeine, noch selbst die vorherrschende sein könne. Dass die Schule den Lehrling auch zum selbständigen Gebrauch seiner Kräfte anzuleiten habe, ja dass dieses ganz vorzüglich ihre Aufgabe sei, bedarf keiner Erinnerung. Es war hier nur zu untersuchen, ob sich für diesen Zweck die Sokratische Methode als unbedingt anwendbar erweise. Auf welche andere Weise übrigens die Schule ihre Aufgabe lösen könne, das nachzuweisen gehört nicht hieher.

Hinsichtlich des Gymnasial-Unterrichts insbesondere bemerke ich noch Folgendes. Die Bildung, welche der Unterricht auf den Gymnasien erzielt, basirt zum grossen Theile auf historischen Grundlagen. Sprache, Litteratur und Geschichte der Völker des Alterthums, deren Cultur die Grundlage der neuern Bildung überhaupt ist, werden als die vorzüglichsten Mittel für die geistige Bildung der Jugend betrachtet. Dass aber bei diesen Gegenständen die Sokratische Methode keine Anwendung finden könne, ist schon oben gesagt; und schon deshalb bleibt sie vom Gymnasial-Unterrichte grösstentheils ausgeschlossen. Die Naturwissenschaften können ebenfalls nicht auf Sokratische Weise gelehrt worden. Der Religions-Unterricht wird zwar sehr oft in katechetischer Form ertheilt; aber eigentliche Sokratik kann doch wenig vorkommen, und bleibt wenigstens von den Lehren, die dem Gebiete der positiven Religion angehören, gänzlich ausgeschlossen. In den obern Klassen möchte selbst eine der wissenschaftlichen Form sich annähernde akroamatische Behandlungsweise die passendste sein. Von den philosophischen Disciplinen gehören nur die propädeutischen in den Gymnasial-Unterricht. Hier sind Proben Sokratischer Behandlung ganz an ihrer Stelle. Somit bliebe hauptsächlich noch die Mathematik übrig, welche auf Sokratische Weise gelehrt werden könnte. Hierfür haben sich in der That stets viele Stimmen erhoben. Manche mögen den Ausspruch des Sokrates im Sinne gehabt haben, den ich bereits oben anführte. Sokrates möchte indess gegenwärtig kaum noch so urtheilen. Aber es ist auch manches sehr gewichtige Urtheil dagegen vernommen worden, und zwar von Männern, deren Leistungen als Lehrer sehr

bedeutend waren, und denen man nicht den beliebten Vorwurf machen konnte, dass sie »am alten Schlendrian hingen«. Diese erklärten es für nicht möglich, eine ganze Klasse durchaus nach Sokratischer Methode mit gutem Erfolge zu unterrichten. Ihre Gründe waren zum Theil von ähnlicher Art wie die vorhin in Beziehung auf den Schulunterricht überhaupt angeführten. Aber mit Recht erinnerten sie auch, dass gründliches Verstehen erzielt werden könne, wenn man den Schüler auch nicht gerade selbst den Weg der Erfindung durchmachen lasse. Der Lehrer soll die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen. Wie sie sich in dem Geiste des gereiften Denkers aus den ihm inwohnenden Grundvorstellungen entwickelt und gestaltet, so soll er sie, nur für die jugendliche Fassungskraft eingerichtet, darstellen und als ein organisch sich bildendes Produkt der Vernunftthätigkeit mittheilen. An seinem Verfahren soll der Schüler mathematisch denken lernen. An Folgerungen aus fruchtbaren Hauptsätzen, an Lösungen mannichfaltiger Aufgaben mag dann auch die Sokratische Methode geübt werden. Aber als herrschende Form kann sie auch beim mathematischen Unterrichte nicht in Anwendung kommen.

Wenn demnach nach meiner Ansicht der Sokratischen Methode beim Schulunterricht nur ein beschränkter Gebrauch zugestanden wird, so soll damit ihr hoher Werth an sich keineswegs herabgesetzt werden. Es liegen nur zum Theil die Gegenstände, für welche sie am geeignetsten ist, nicht im Bereiche des Schulunterrichts, zum Theil wird durch die Eigenthümlichkeit des letztern ihre Beschränkung geboten. Sokrates bildete sich seine Methode für den bestimmten Zweck seines Wirkens, wie ich ihn oben darzustellen versucht habe, seiner Individualität und den Bedürfnissen seiner Zeit gemäss; eine allgemeine Methode für die Schule konnte er nicht aufstellen wollen. Aber schön wäre es, wenn der Geist, aus welchem sein Wirken hervorging, überall die Seele der Erziehung und des Unterrichts wäre — seine hohe Begeisterung für das Wahre, Schöne und Gute, und die Liebe seines reinen Gemüths.

ANSPRACHE BEI DER UBERNAHME DES RECTORATS DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN AM 15. OCTOBER 1873.

Alle während der letzten drei Jahre in diesem Saale gehaltenen Reden, von den rein geschäftlichen abgesehn, tragen die Signatur der grossen Zeit, in der sie entstanden sind. Sie gleichen nicht den gewöhnlichen, auf einen beschränkten Zuhörerkreis berechneten akademischen Ansprachen, sondern »Reden an die Nation«, alle durchweht von demselben frischen Hauche des Lebens, mag nun der Sprecher in Zorn und Empörung über den frevelhaften Friedensbruch dem feindlichen Volk sein wahres Bild entgegen halten und der Siegeszuversicht des eigenen Worte geben, oder ein anderer dem Königlichen Führer der deutschen Heere als Kaiser des wiedererstandenen Reiches ehrfurchtsvolle Huldigung darbringen, oder wieder ein anderer in geschichtlich-politischen Betrachtungen die Gegenwart mit der Vergangenheit verknüpfen, zugleich Aufgaben und Ziele der Zukunft andeutend. Künftige Geschichtschreiber werden diese Reden den werthvollsten Documenten aus unserer Zeit anreihen; wir legen sie zu den Urkunden, in denen unsere Universität das Andenken an drei andere glorreiche Jahre aufbewahrt — die Söhne der jüngern Epoche haben sich denen der ältern nicht als unebenbürtig erwiesen.

Meine Herren! Die Zeit, in der es den Vertretern der Universität, wenn sie von diesem Platze aus sprachen, erlaubt und geboten war, die sie zunächst angehenden Angelegenheiten den uns alle als Söhne des Vaterlands und Bürger des Staats lebhaft und tief berührenden Fragen des allgemeinen

Wohls hintanzusetzen — diese Zeit scheint für jetzt vorüber zu sein. Der feindliche Boden ist geräumt, das Fundament des neuen Reichs gelegt. Jedermann sichtbar ist vor wenigen Wochen der Abschluss einer ruhmvollen Epoche bezeichnet worden durch die Enthüllung des »vom dankbaren Vaterland dem siegreichen Heere« errichteten weithin glänzenden Denkmals.

Freilich den Beginn eines Zeitalters des Friedens für unser Volk bedeutet dieser Abschluss nicht. Aber die zunächst uns bedrohenden Kämpfe, deren Ausbruch unsere Erfolge selbst beschleunigt haben, während ihr Ende vielleicht kaum einer der Jetztlebenden sehen wird, erwachsen aus dem Widerstreit unversöhnlicher Principien, und können nur mit dem Aufgebot aller geistigen Kräfte siegreich bestanden werden.

Deshalb mahnt mich auch der Hinblick auf die kommende Zeit und die ernsten Anforderungen, die sie an das jetzt heranwachsende Geschlecht stellen wird, heute in altgewohnter Weise meine Ansprache vorzugsweise an unsere jugendlichen Genossen zu richten, deren Heranbildung zu wissenschaftlicher Tüchtigkeit, geistiger Freiheit und männlicher Willensfestigkeit in den Wirren der Gegenwart mehr als je die nächste Aufgabe und höchste Pflicht unserer Hochschule ist. Und so begrüsse ich denn Sie alle, liebe Commilitonen, mit einem herzlichen »Willkommen«, insbesondere diejenigen von Ihnen, die sich heute zum erstenmale des neu erworbenen akademischen Bürgerrechts erfreuen. Sie treten in einen neuen Abschnitt Ihres Lebens, gewiss alle voll der freudigsten Hoffnungen und der edelsten Entschlüsse. Mögen sich Ihnen diese Hoffnungen in reichstem Masse erfüllen, diese Entschlüsse zu fruchtbaren Thaten werden. Aber ich möchte Ihnen nicht einen Wunsch bloss entgegen bringen, sondern auch Einiges an's Herz legen was Sie wissen müssen, wenn Sie auf Ihrer akademischen Laufbahn von Anfang an eines bestimmten Zieles sich wohl bewusst ohne Schwanken vorwärtsschreiten und nicht Gefahr laufen wollen, dass die Zukunft, die jetzt so verheissungsvoll vor Ihnen liegende, Ihnen bittre Enttäuschungen bringe und die Klage abpresse:

»Die Ideale sind zerronnen,
Die einst das trunkne Herz geschwellt«.

Alma mater wird die Universität pietätvoll genannt, wenn Männer, deren Geist sie gebildet und deren Charakter sie gestählt hat, die Erinnerung an

ihre akademischen Studienjahre feiern. Aber sie ist keine Mutter, welche ihre Liebe bedingungslos gewährt, sie an Unwürdige und Schwache verschwendet, und auch unverständigem Begehren nachgiebt. Wer die Universität bezieht mit der Absicht, die höchste intellectuelle und sittliche Bildung, die sie ihm geben kann, und mit derselben die beste Vorbereitung für seinen künftigen Lebensberuf auch wirklich sich anzueignen, darf nicht bloss empfangen wollen, nicht erwarten, dass der Ertrag der geistigen Thätigkeit vieler Geschlechter ihm könne überantwortet werden, ohne dass er, unter der Führung zieles- und wegeskundiger Lehrer allerdings, ihn selbst sich erarbeite und für diesen Zweck einsetze, was er an Kraft und Willen besitzt. Er darf nicht das Einsammeln sofort oder künftig praktisch verwerthbarer Kenntnisse und Geschicklichkeiten als das Hauptziel seiner Studien betrachten, sondern muss vor allen Dingen, wie man es treffend bezeichnet hat, das Lernen zu erlernen suchen. Auch muss er wissen, dass die Organisation unserer Hochschulen nicht etwas willkürlich Festgesetztes und beliebig Umzuänderndes ist, sondern aus dem Wesen ihrer Aufgabe, wohlvorbereitete junge Männer zu Trägern und Förderern der Wissenschaft, sowie für den Dienst des Vaterlandes zu erziehen, naturgemäss und in stetiger Entwicklung sich herausgebildet hat und ein unberechtigtes Eingreifen von Aussen nicht verträgt. Hiernach wird auch jeder beurtheilen können, ob Art und Mass der Vorbereitung, die er mitbringt, für den Genuss des akademischen Unterrichts ausreiche, und nicht etwa verlangen, dass die Universität ihrer eigentlichen Aufgabe untreu werde und sich seinen Bedürfnissen anbequeme.

Über alle diese und manche eben so wichtige andere Punkte würden Sie, liebe Commilitonen, am allerbesten sich aufklären können, wenn Ihnen zugänglich gemacht würde, was darüber von einer grossen Anzahl meiner Amtsvorgänger in Antrittsreden oder bei andern Gelegenheiten gesagt worden ist, so erschöpfend klar und eindringlich, dass kaum etwas Wesentliches hinzugefügt werden kann. Ich möchte wirklich wünschen, dass von einer geschickten Hand wenigstens die bedeutendsten dieser Reden vielleicht von einigen Erläuterungen begleitet in einem mässigen Bande zusammengestellt würden. Man hätte dann die vortrefflichste »Anleitung für Studirende zur Einrichtung ihres akademischen Lebens«, wie eine früher viel gehörte Vorlesung hiess. Am liebsten wäre es mir schon, wenn Jedem bei der Immatri-

culation ein Exemplar zugleich mit den Disciplinar-Gesetzen in die Hand gegeben werden könnte; auf die letztern würde so vielleicht auch ein Schimmer des idealen Lichtes fallen, in welchem dann die Universität und ihre wesentlichen Einrichtungen dem jungen Studenten erscheinen würden.

In der That, meine Herren, nehmen wir einmal an, wir haben ein solches Buch vor uns, so will ich Ihnen an ein Paar Beispielen zeigen, welche Fülle von Belehrung und Anregung Sie daraus schöpfen können.

Sie fragen nach der Idee der Universität, ihrer Aufgabe und Bestimmung. Fichte, der erste erwählte Rector dieser Hochschule, sagt Ihnen, »dass sie da ist, um dem Fortgange der Bildung des Menschengeschlechts Stetigkeit und Sicherheit zu gewähren, indem durch ihre Vermittelung mit Besonnenheit und nach fester Regel jedes Zeitalter seine höchste Verstandesbildung dem folgenden Zeitalter übergiebt, damit auch dieses sie vermehre und in dieser Vermehrung auch seinem folgenden übergebe und so fort bis an das Ende der Tage«.

Sie wollen sich ferner klar machen, worin das Eigenthümliche der akademischen Unterrichtsweise bestehe, von der man Ihnen sagt, dass sie auch durch die vortrefflichsten Compendien nicht ersetzt werden könne. Rudorff, an dessen Verlust wir heute schmerzlich erinnert werden, giebt Ihnen Aufschluss: »Das Wesentliche aber auch Unersetzliche der Hochschule und ihrer Unterrichtsweise besteht darin, dass die Wissenschaft durch unmittelbare persönliche Berührung des von ihrer Hoheit ergriffenen forschenden Lehrers mit der frischen noch unverbrauchten Jugendkraft, gleichsam selbst Person geworden, lebendig und anregend zu eigenem Studium mitgetheilt wird. Denn nicht sowohl das Lehren als solches als vielmehr das Erkennen- und Fortschreiten-Lehren ist die eigentliche Aufgabe des Universitätsunterrichts«.

Man will Ihnen aber die Besorgniss einreden, bei so idealen Vorstellungen von der Aufgabe und Lehrweise der Universität gleiche diese ja einem phantastischen Luftschlosse, worin keine Werkstatt Raum habe für die Bedürfnisse des Staats, für das eigentlich Praktische und die Technik, die Wunder wirkend Zeit und Raum überflügelt. »Keineswegs — beruhigt Sie unser unvergesslicher Boeckh. Dies ist das wahrhaft Praktische, dass der Gedanke in seiner Idealität ausgeprägt sich Bahn breche durch das Leben, die Idee, welche niemals und nirgends im Leben vollkommen erreicht wird, in diesem

annäherungsweise sich verwirkliche; dadurch wird in die Räder des Lebens eingegriffen, nicht aber dadurch, dass die Jugend geschult wird, sich in dem gewohnten Kreise der herkömmlichen Geschäftsthätigkeit mechanisch fortzubewegen oder vielmehr forttreiben zu lassen, statt mit der Kraft und Fülle des Geistes das Triebwerk in Bewegung zu setzen«.

Sie hören endlich vielerlei Gerede von der Stabilität der heutigen Universitäten, ihrer Abgeneigtheit, sich den veränderten Zeitideen anzupassen u. dgl. Auch hierauf hat Boeckh die Antwort schon gegeben in den trefflichen Worten: »Eine wissenschaftliche Körperschaft darf und kann nicht bewegungslos sein; dennoch ist ihr nichts zuträglicher als Stetigkeit des Geistes und der Grundsätze, wenn anders diese von Anbeginn tüchtig und löblich waren. Und sie waren es hier. Solche Stetigkeit ist selber Bewegung und Fortschritt«.

Ich darf diese Anführungen nicht noch vermehren, möchte Sie nur noch besonders hinweisen auf Fichtes und Trendelenburgs in grossem Sinne und freiem Geiste gedachte Auslassungen über Begriff und Nothwendigkeit der akademischen Lehr- und Lernfreiheit, sowie des letztern eindringliche Mahnung an die Studirenden zu frühzeitig begonnenem ernstem Quellen-Studium.

Wenn ich nun noch einige eigene Bemerkungen hinzusetze, so geschieht dies auf die Gefahr hin, dass Ihnen dieselben nach dem Gehörten trivial klingen mögen.

Der Erfolg des akademischen Unterrichts beruht, wie Sie vernommen haben, zum grossen Theile darauf, dass der Lehrer den Lernenden fortwährend zu eigener Forschung anleitet. Dies geschieht aber nicht etwa durch pädagogische Anweisung, sondern zunächst und hauptsächlich dadurch, dass der Lehrer beim Vortrag einer Disciplin in seiner Darstellung selbst durch Anordnung des Stoffes und Hervorhebung der leitenden Gedanken angemessen den Lernenden erkennen lässt, auf welchem Wege der gereifte und das bereits Erforschte beherrschende Denker folgerichtig vorschreitend zu neuen Ergebnissen oder besserer Begründung schon vorhandener gelangt. Dann versäumt er es nicht, ihm die zur Zeit nicht überschrittenen Grenzen der Wissenschaft zu bezeichnen und diejenigen Punkte anzudeuten, von denen aus ein weiteres Vordringen zunächst möglich scheint. Auch einen tiefern

Einblick in den Gang seiner eigenen Forschungen versagt er ihm nicht, verschweigt selbst nicht begangene Irrthümer und getäuschte Erwartungen. Auf diese Weise kommen zwar nicht so farbige, elegante und auch geistesträgeren Zuhörern verständliche Vorträge zu Stande wie sie z. B. die meisten französischen Docenten nach lithographirten, einem vorgeschriebenen Programme gemäss vollständig ausgearbeiteten Heften halten oder auch wohl durch ihre Assistenten ablesen lassen; indessen, wenn aus diesen vielleicht mehr Kenntnisse sich erwerben lassen, so verschaffen jene eine intensivere Bildung.

Der einigermassen vorgeschrittene Student muss auch mit selbstgefundenen Problemen sich beschäftigen. Den meisten wird es schwer, solche Probleme zu entdecken, welche von ihnen bewältigt werden können und zugleich ein wissenschaftliches Interesse haben. Jacobi, der grosse Mathematiker, dessen persönlichen Unterricht nicht genossen zu haben ich niemals aufhören werde zu bedauern, hat seinen Zuhörern einmal folgenden Rath gegeben. »Nicht sich hinsetzen und Entdeckungen machen wollen ist der Weg, in die Wissenschaft einzudringen, sondern das Einzelne, Bekannte klar und durchsichtig machen, sich mit Problemen beschäftigen, welche es seien, das ist ganz einerlei; auf diesem Wege findet man die wahren Probleme der Wissenschaft und die Principien, die zu Entdeckungen führen«.

Freilich werden es so nur sehr tüchtige Köpfe machen können. Für andere möchte ein Weg mehr zu empfehlen sein, auf dem, wie man weiss, Jacobi selbst den Anstoss zu manchen seiner Arbeiten erhalten hat. In den ältern, wenig mehr gelesenen Schriften der gelehrten Gesellschaften, sowie in der umfangreichen wissenschaftlichen Correspondenz der Gelehrten früherer Zeit ist eine ausserordentliche Fülle wissenschaftlichen Stoffes aufgehäuft, aus welchem, wer zu finden weiss, Vielerlei zu eigenen Arbeiten ihn Anregendes herauslesen und nebenbei noch manches Nützliche lernen kann.

Noch zwei Punkte habe ich flüchtig zu berühren.

Der Forschungstrieb entspringt dem im innersten Wesen des menschlichen Geistes begründeten Bedürfniss, in dem Mit- und Nacheinandersein der Dinge Ordnung und gesetzmässigen Zusammenhang zu entdecken. Die einzelnen wissenschaftlichen Disciplinen erhalten ihre Bedeutung dadurch, dass sie alle zu diesem Zwecke mitwirken, aber nicht zusammenhangslos, sondern gleichsam eine Kette bildend, welche von der Mathematik als dem

einen äussersten Gliede ausgehend durch die verschiedenen Zweige der Naturkunde und der historischen Wissenschaften im weitesten Sinne des Wortes hindurch bis zu der Philosophie als dem Schlussgliede sich hinzieht. Mathematik und Naturwissenschaft beschäftigen sich beide mit den Erscheinungsformen des Seins in Raum und Zeit, jene mit den in der Idee existirenden, überhaupt möglichen, diese mit den in der Körperwelt verwirklichten. So ist die Mathematik für die Naturwissenschaft eine nothwendige Voraussetzung, nicht eine Hülfsdisciplin im gewöhnlichen Sinne; umgekehrt liefert der beobachtende und experimentirende Naturforscher in seinen Resultaten dem Mathematiker mehr als eine blosse Aufgaben-Sammlung. Die historischen Disciplinen ferner, Geschichtswissenschaft im engern Sinne, Sprachforschung u. s. w., die im Entwicklungsgang des Menschengeschlechts die waltenden Gesetze und treibenden Kräfte zu erforschen und darzulegen haben, finden ihre Verbindung mit den Naturwissenschaften darin, dass die Entwicklung des Menschenlebens, in den Völkern wie in dem Einzelnen, durch die Wechselwirkung zwischen seinem eignen Sein und dem gesammten Sein ausser ihm bedingt ist. Die Philosophie endlich, indem sie die Ergebnisse aller Wissenschaften zusammenfasst, reinigt, vergeistigt, arbeitet an der Verwirklichung des wissenschaftlichen Ideals, in der unendlichen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen der Natur und des geistigen Lebens die Einheit, das Absolute zu erkennen. In diesem Sinne kann man sagen, dass Erkenntniss des Wesens der Dinge das letzte Ziel aller wissenschaftlichen Forschung sei, und dass nach der Stufe, welche auf dem Wege zu diesem Ziele in jedem Zeitalter die Menschheit erreicht hat, der Grad der allgemeinen Bildung dieses Zeitalters bemessen werden müsse. Wie und in welchem Masse nun der Einzelne an der allgemeinen Bildung seiner Zeit Theil nehmen könne und solle, ist nicht so leicht zu bestimmen. Für Sie, liebe Commilitonen, mögen folgende Winke genügen. Zunächst steht fest, dass es keine unfruchtbarere Beschäftigung geben kann als Vielerlei treiben und Nichts ergründen; überdies werden Sie nur dadurch, dass sie einem Hauptfache ein tiefer eindringendes Studium widmen, das Wesen wissenschaftlicher Forschung überhaupt verstehen lernen. Auch kann heutzutage, wo nicht nur alle wissenschaftlichen Disciplinen eine Überfülle des Stoffs darbieten, sondern auch viele in raschester Entwicklung begriffen sind, Niemand mehr dazu gelangen,

in dem gesammten Gebiet des Wissens in dem Masse heimisch zu werden wie es in früherer Zeit wohl einzelnen besonders hochbegabten und unermüdlich thätigen Menschen gelungen ist. Gleichwohl ist es einem wohlvorbereiteten und fleissigen jungen Manne auch gegenwärtig möglich und, wenn er später den Sinn für ideale Zwecke nicht ganz verlieren, den Bestrebungen anderer nicht fremd gegenüber stehen und auch in den Bewegungen und Kämpfen des Lebens nicht haltlos hin und her schwanken will, unumgänglich nothwendig, neben dem gründlichen Studium eines Hauptfachs auch mit denjenigen Disciplinen, die nicht grade Hülfsdisciplinen der seinigen sind, sich wenigstens so weit zu beschäftigen, dass er von der Aufgabe und der wissenschaftlichen Bedeutung jeder einzelnen eine richtige Vorstellung erhält. Kein Student sollte also die Universität verlassen ohne Vorlesungen über politische Geschichte, allgemeine Culturgeschichte und Geschichte der Philosophie insbesondere gehört zu haben. Keiner auf dem Gymnasium in die klassische Litteratur eingeführte sollte auf der Universität derselben ganz untreu werden. Aber es könnten auch Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik und der Naturwissenschaften so eingerichtet werden, dass sie für Juristen und Philologen in dem von mir angedeuteten Sinne verständlich und bildend würden. Die Vorkenntnisse, die jeder auf dem Gymnasium sich erwerben kann, reichen vollkommen dazu aus. Ich widerstehe nur ungern der Versuchung, dies an einem Beispiele ausführlicher darzulegen.

Ich schliesse mit einer Mahnung, deren Ernst Sie, theure Commilitonen, nicht verkennen wollen.

Mit Recht rühmt man, was der Fortschritt der Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften für die Vermehrung der Wohlfahrt des Menschengeschlechts geleistet hat. Grössere Erfolge noch, hofft man mit nicht minderm Rechte, werde er in Zukunft erreichen. Erwärmen Sie sich für alle edlen Bestrebungen, die auf dieses Ziel gerichtet sind. Begeistern Sie sich durch den Gedanken, dass Männer, die unsterbliche Entdeckungen in der Wissenschaft gemacht haben, dadurch auch Wohlthäter von Millionen geworden sind. Doch nach dem, was ich vorhin über den Zusammenhang der Wissenschaften sagte, werden Sie sich nicht der Einsicht verschliessen, dass nur aus dem harmonischen Zusammenwirken aller der Menschheit wahres Heil erwachsen werde. Keine von ihnen, auch nicht die Naturwissenschaft,

hat allein die Mission, nicht nur die Menschheit aus geistiger Sklaverei zu erlösen, sondern sie auch zur wahren Sittlichkeit zu erziehen und ihr zugleich die materiellen Mittel zur Glückseligkeit zu liefern.

Vor allem aber erfüllen Sie sich mit der Überzeugung, dass der Wissenschaft höchsten Preis nur erringt, wer — um mit dem Dichter zu reden — in ihr die hohe, himmlische Göttin erblickt, nicht aber das Weib in ihr sucht oder gar die dienende Magd.

Freilich ist Wissen auch Ehre, ist Macht, ist die Wünschelruthe, die zeigt wo Schätze liegen, ist der Stein der Weisen, den die alten Alchymisten nicht auf dem richtigen Wege suchten. Darum kamen schon zu Sokrates die jungen Männer von Athen, damit er die Kunst »zu herrschen über die Menschen« sie lehre; und so drängt sich auch in unsere Hörsäle eine Schaar, welche Weisheit begehrt zu allerlei Gebrauch, den Schein der Wissenschaft, nicht sie selbst.

Aber alle diese bleiben — ich gebrauche ein altes Bild — in der Vorhalle des Tempels zurück, in dessen innerstem Heiligthum der reine Gottesdienst der Wahrheit gefeiert und nicht den bösen Dämonen der Zeit geopfert wird; wer dies Innerste betreten will, erscheine reinen Sinnes, von lauterem Wissensdrang beseelt und voll echter Begeisterung für alles Grosse, das der Menschengeist schafft und für alles Edle und Schöne, das im Menschengemüth seine Stätte hat.

REDE ZUR GEDÄCHTNISS-FEIER DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN AM 3. AUGUST 1874.

Als König Friedrich Wilhelm der Dritte, dessen Gedächtniss in dankbarer Verehrung zu feiern wir uns abermals hier versammelt haben, in der bedrängtesten und zugleich ruhmreichsten Zeit seiner Regierung die Gründung einer grossen Universität in der Hauptstadt seines Landes beschloss, waren es, wie man weiss, Erwägungen mancherlei Art, die ihn leiteten, und wurden auch Zwecke von vorübergehender Bedeutung ins Auge gefasst. Der Grundgedanke aber, von dem der hochsinnige Monarch und seine erleuchteten Rathgeber ausgingen und an dem sie unbeirrt durch Bedenken und Widerspruch festhielten, war der, dass auf der zu stiftenden Hochschule, für welche die bedeutendsten Forscher und Lehrer zu gewinnen und die reichsten Unterrichtsmittel zu beschaffen man bedacht war, die Wissenschaft ihre höchsten Ziele verfolgen und zugleich den höchsten Zwecken des Staates dienen solle. In diesem Gedanken fand, verständlich für jedermann, dem Wissenschaft und Staat keine fremden Begriffe sind, zum erstenmal ihren vollen und reinen Ausdruck die Idee, welche zu verwirklichen in der Gegenwart überhaupt Aufgabe und Beruf der Universitäten ist. Sie mit richtigem Verständniss erfasst und in ihrem Sinne gehandelt zu haben in einer Zeit, wo Philanthropen und Kosmopoliten für Errichtung vollkommenster Bildungsanstalten für die ganze Menschheit schwärmten, bei der Masse dagegen Sinn für ideale Bestrebungen kaum vorhanden war, ist Friedrich Wilhelms des Dritten unvergängliches Verdienst, dem kein Abbruch geschieht, wenn darauf hingewiesen wird, dass diese Idee wie jede andere, welche auf das Kulturleben eines

grossen Volkes dauernd einen bestimmenden Einfluss auszuüben die Kraft hat, nicht die Konzeption eines Einzigen, sondern die langsam gezeitigte Frucht geschichtlicher Entwickelung ist.

Die Universitäten des Mittelalters waren autonome Körperschaften, in sich abgeschlossen und ohne sichtbaren Zusammenhang mit dem Staate, in welchem sie ihren Sitz hatten. Die älteren besassen sogar, wie wir es jetzt nennen würden, einen internationalen Charakter, etwas ganz Natürliches, so lange es nur wenig Orte gab, wo eine bestimmte Disziplin vertreten war, und zugleich die lateinische Sprache innerhalb des Gelehrtenstandes die Verkehrssprache bildete. Die Studenten waren meist Männer von schon vorgerücktem Alter, welche kamen, um eine bestimmte Fachwissenschaft, Theologie und scholastische Philosophie, Jurisprudenz, Medizin zu studiren, die Mehrzahl eines praktischen Zweckes halber, viele auch aus wirklichem Wissensdrang, oder um als Gelehrte Ansehen und Ruhm sich zu erwerben. Der Unterricht bestand, abgesehen von formalen Übungen, in der Überlieferung des aus dem Alterthum überkommenen wissenschaftlichen Stoffes von einer Generation an die andere; Fähigkeit und Neigung zur selbstständigen Durcharbeitung desselben oder zu eigener Forschung auf noch nicht betretenen Wegen war bei Lehrern wie Schülern nur ausnahmsweise vorhanden.

Diese Verhältnisse änderten sich erst, als gegen Ende des Mittelalters die neue Schule der Humanisten in ihrem Kampfe gegen die Scholastiker aller Orten die besten Köpfe für sich gewann und der frische Hauch der Zeit »in der es eine Lust war zu leben« auch in die Zellen der Mönche und die Bursen der Universitäten drang. In Deutschland aber — und nur von diesem ist im Folgenden die Rede — war es die Reformation, welche den mächtigsten Einfluss auf die Universitäten ausübte und den Geist derselben auf das wesentlichste änderte. Nicht als ob mit der Reformation sofort das Prinzip der freien Forschung zur Geltung gekommen wäre — wurde doch, um eins anzuführen, in Wittenberg die Kopernikanische Lehre auf das heftigste bekämpft und verdammt, während sie in Rom noch Duldung fand. Auch ist nicht das Wichtigste, dass auf den protestantischen Universitäten in Folge der Reformation die historischen und sprachlichen Studien als unentbehrlich für die vorzugsweise betriebene Schrifterklärung mehr wie bisher Eingang fanden und um so eifriger gepflegt wurden, als fast alle bedeutenden

Humanisten sich der Reformation anschlossen und die überall aufblühenden Gymnasien wohl vorbereitete Studirende jüngeren Alters lieferten. Aber das war eine neue Erscheinung im deutschen Leben, dass Gelehrte der Universitäten, auf der einen wie der anderen Seite, mit Wort und Schrift für eine Sache wirkten und kämpften, die nichts gemein hatte mit den gewohnten Schulstreitigkeiten, sondern ihnen wie allen im Volk, die zu ihnen standen, eine heilige war, welche ihre ganze Seele füllte. So entstand die erste nachhaltige Wechselwirkung zwischen dem Gelehrtenstande und dem Volke. Jener wurde seiner Zusammengehörigkeit mit der Nation sich bewusst; das vom Katheder gesprochene Wort drang über die engen Grenzen des Hörsaals hinaus in weite Kreise, und das Volk blickte voll Achtung auf die gelehrten Männer, welche mit den Waffen des Geistes verfochten, was ihm Herzenssache war. Heisst doch der volksthümlichste der Reformatoren bis auf den heutigen Tag im Munde seiner Landsleute stets noch der »Doctor« Martin Luther.

Freilich war der Aufschwung, den die Universitäten unter dem Einfluss der Reformation nahmen, auch auf den protestantischen, nur von kurzer Dauer.

Der anfängliche Glaubenseifer entartete zu starrem Dogmatismus, aus der Schriftforschung erwuchs der bornirteste Buchstabenglaube, und der Streit unter den Vertretern der verschiedenen Richtungen in der protestantischen Kirche ward mehr und mehr zum persönlichen Hader erbitterter Gegner. Dazu der unselige Krieg, der den Wohlstand und die Kultur der Nation schier vernichtete, die Schulen verödete und die Sitten verwildern liess. Wie trostlos bei solcher Lage der Dinge sich der Zustand der Universitäten im 17. Jahrhundert gestaltet hatte, bezeichnet ein geistvoller Historiker treffend mit den Worten: »Formzwang in der Wissenschaft und Formlosigkeit im Leben«.

Doch der kräftige und tiefe Geist des deutschen Volkes rettete die Universitäten vor dem sie bedrohenden gänzlichen Verfall. Die Gründung der Hochschulen Halle und Göttingen bezeichnet in der Geschichte des Universitätswesens einen abermaligen Wendepunkt.

In Halle lebte der ursprüngliche Geist der Reformation, nur noch mehr auf das Innerliche gerichtet, wieder auf und erregte aufs tiefste die Gemüther, während nach einer anderen Richtung hin die Bestrebungen eines Thomasius,

Wissenschaft und Leben mit einander in Einklang zu setzen, eine Bewegung hervorriefen, welche auf allen Universitäten die wesentlichsten Reformen des akademischen Unterrichtes, namentlich die Einführung der deutschen Sprache als Lehrsprache, zur Folge hatte.

Göttingens Verdienst und Ruhm beruht auf einem anderen Grunde. In Göttingen machte sich von Anfang an das Bestreben sichtbar, die Studirenden zu tüchtigen Menschen zu erziehen, die einen hervorragenden Platz im Leben mit Ehren sollten behaupten können. Die juristische Fakultät stand daher auf dieser Universität im Vordergrunde und galt im vorigen Jahrhundert unbestritten als die erste in Deutschland. Aber neben ihr war es die philosophische Fakultät, die in Göttingen zuerst eine grössere Wirksamkeit entfaltete — wenn auch nicht gerade in dem Fache, nach welchem sie benannt wird —, indem hier die historischen, philologischen, kameralistischen und — soweit davon in damaliger Zeit die Rede sein konnte — die naturwissenschaftlichen Disziplinen in grösserer Vollständigkeit und gründlicher gelehrt wurden als an irgend einer anderen Universität. Freilich fehlte viel, dass man die Bedeutung, die alle diese Fächer als selbstständige Wissenschaften haben, voll anerkannt hätte; man schätzte sie mehr als Hülfsdisziplinen oder ihrer Wichtigkeit für das praktische Leben halber. Freier wissenschaftlicher Geist, der im innersten Wesen des Menschen wurzelnde Trieb, in dem Neben- und Nacheinandersein der Dinge Zusammenhang, Ordnung und Gesetz zu erkennen, dieser Geist, der nach dem Wahren strebt nur um der Wahrheit willen, waltete auch in Göttingen damals nicht.

Aber schon hatte er die Stätte gefunden, von wo aus er mit belebendem Hauche über die deutschen Lande sich ergiessen sollte. Im fernen Osten waren im Kopfe eines einsamen Denkers jene bewunderungswürdigen Werke gereift, welche die Grundlage der deutschen Philosophie bilden, und allen Wechsel der Systeme überdauern werden. Das heutige Geschlecht kann sich nur schwer eine Vorstellung von der Gewalt und Tiefe der Bewegung machen, in welche das Erscheinen dieser Werke, in denen der Königsberger Weise es unternahm, die Grenzen des Erkennens festzustellen und gleichwohl den Forschungstrieb zur höchsten Thatkraft anzuspannen, während der beiden letzten Dezennien des vergangenen Jahrhunderts alle denkenden und höheren Interessen zugänglichen Geister der Nation versetzte. Die Wirkung dieser

Bewegung aber dauert fort. Die Kant'sche Philosophie hat unserm Volke den Sinn für ernste und tiefe Forschung, das Verständniss echter Wissenschaft aufgeschlossen.

Um an einem Beispiel zu zeigen, welch unermesslichen Einfluss sie ausübte, will ich daran erinnern, dass sie selbst in die theologischen Fakultäten der katholischen Universitäten Eingang fand. Noch im ganzen ersten Viertel dieses Jahrhunderts galt es als Vorschrift, dass die jungen Theologen, bevor sie die Priesterweihe empfingen, ein strenges Examen in der Philosophie — und diese basirte damals fast überall auf den Kant'schen Prinzipien — zu bestehen hatten. Damals würde eine gesetzliche Bestimmung wie die jüngst erlassene, dass ein Kandidat der Theologie, auch ein katholischer, einen gewissen Grad allgemeiner wissenschaftlicher Bildung besitzen und zu deren Nachweis sich prüfen lassen müsse, nur insofern bei den Betheiligten Befremden erregt haben, als man über das geringe Mass der gestellten Forderungen sich gewundert haben würde. Aber jene aus der Schule eines Fürstenberg, Sailer, Wessenberg hervorgegangene Generation hochgebildeter, denkender und humaner Geistlichen, wie ich sie in meiner Jugend noch gekannt habe, auf deren Bücherbrett neben der Kritik der reinen Vernunft Nathan der Weise stand, ist gegenwärtig ausgestorben.

Aus der Lehre Kants erwuchsen die philosophischen Systeme Fichtes und Schellings, auf die ich ebenfalls einen Blick werfen muss, indem sie beide auf den Geist der deutschen Universitäten wesentlichen Einfluss gehabt haben.

Als anregendes Ferment unstreitig zunächst einen wohlthätigen. Was aber ihre dauernde Wirkung angeht, so darf man, um zunächst von Schellings und seiner Schule angeblicher Naturphilosophie zu sprechen, ohne Furcht vor Widerspruch sagen, dass, wenn überhaupt etwas durch sie dauernd gefördert worden ist, dies jedenfalls die Naturwissenschaften nicht sind. Denn was sollte diesen jenes sinnlose Spiel mit Worten, Formen und Zeichen, die der Physik und Mathematik entlehnt in ganz anderer oder eigentlich gar keiner Bedeutung gebraucht wurden, oder jene kindlichen Erklärungsversuche durch Bilder und Gleichnisse, an denen man Gefallen fand, frommen? Vielmehr ist für die Vermessenheit — denn hier ist ein milderes Wort nicht an der Stelle —, dass man ohne positive Kenntnisse, ohne Beobachtung und Versuch

die Welt mit ihrer unendlichen Fülle von Erscheinungen begreifen und »aus der Idee« oder, wie es später hiess, »logisch« konstruiren wollte, Deutschland schwer genug dadurch gestraft worden, dass es in den Naturwissenschaften Dezennien lang hinter anderen Ländern zurückgeblieben ist, und zugleich von vielen der heutigen Vertreter derselben die spekulative Richtung der Naturforschung mehr als frommt missachtet wird.

Was ferner Fichte angeht, so steht wohl fest, dass der Erfolg seines Wirkens mehr seiner gewaltigen Persönlichkeit zuzuschreiben ist, als seinem philosophischen System. Ein Mann, für den »das Sittliche die Substanz der Welt und alles übrige nur da war, damit das Sittliche sei«, ein Mann der That zugleich, in welchem Kants Begriff vom reinen Willen verkörpert erschien, war er berufen, dem in sittliche Erschlaffung versunkenen Zeitalter das Bewusstsein der Pflicht und den Muth des Handelns wiederzugeben.

Dies ist etwas so Grosses, dass dagegen die von niemandem geleugneten Schwächen in Fichtes Lehrsystem völlig verschwinden. Eins aber darf nicht verschwiegen werden, weil es erklärt, warum die sichtbaren Erfolge seiner Thätigkeit so weit hinter seinen Absichten zurückgeblieben sind. Es ist das seine Missachtung des Empirischen und historisch Gewordenen. Ohne alle Rücksicht auf die bestehende Ordnung der Dinge zog er die Konsequenzen seiner Prinzipien; was immer diesen widersprechen mochte, sollte weichen. Zum Heile der Menschheit gab er — bei seinem bekannten Plane der gemeinsamen Erziehung der Kinder in öffentlichen Anstalten — unbedenklich das wesentlichste Element der Gesellschaft, die Familie, Preis. Es walten aber auch in der Organisation und geschichtlichen Entwickelung des Menschengeschlechts Gesetze, in die mit der Kraft des Geistes einzugreifen dem Einzelnen ebenso wenig gegeben ist als der Wille des Menschen auf andere Naturgesetze Einfluss hat.

Insbesondere aber ist es bei Fichte ein charakteristischer Zug, den er jedoch mit den meisten Zeitgenossen, die selbst beim Becherklang »auf das Wohl der ganzen Welt zu zielen« gewohnt waren, gemein hat — dass es stets die gesammte Menschheit ist, auf die sich seine Pläne richten. Von der Bestimmung der Menschheit, das Göttliche, Übersinnliche in der sichtbaren Welt zur Darstellung zu bringen, hat er den höchsten Begriff; der Einzelne ist nur da, damit die Menschheit diese ihre Bestimmung erreiche.

Dass aber in einem organisch gegliederten Ganzen, wie doch das Menschengeschlecht es ist, das Individuum nur an der Stelle, wo es dem Organismus eingefügt ist, dem Ganzen dienen kann, und auch dies nur, indem es nach der eigenthümlichen Anlage seines Wesens sich entwickelt, ist vielleicht eine zu triviale Wahrheit, als dass sie in Fichtes System Platz fände. Ferner, dass innerhalb der Menschheit Familie, Gemeinde, Nation, Staat, Kirche Individuen höherer Art sind, ein jedes innerhalb einer bestimmten Sphäre zu einer selbstständigen Existenz berechtigt und eben dadurch, dass es in dieser sich auslebt, seine Bestimmung erfüllend, auch das wird übersehen oder geradezu verneint.

Darum ist auch der Staat Fichtes der nach der Idee konstruirte Vernunftstaat, nicht der wirkliche, historische Staat, dessen Bestimmung ist, in wohlorganisirter Verfassung des Einzelnen Freiheit und Recht zu schützen, während jener als der ärgste und unerbittlichste Tyrann auftritt.

Ich habe mich bei Fichte nicht ohne Absicht etwas länger aufgehalten. Bei keiner Persönlichkeit seiner Zeit tritt so deutlich hervor, wie wenig damals auch die hellsten Köpfe zur Anerkennung des Grundsatzes geneigt waren, von dem ich im Anfang meiner Rede sagte, dass er bei der Stiftung unserer Universität der leitende gewesen sei.

Fichte hat einst an dieser Stelle von der Universität, wie sie in seinem Geiste lebte, ein Bild entworfen, das in seiner idealen Verklärung wie ein Erzeugniss dichterischer Phantasie erscheint. Die Universität ist ihm »die von Menschen ausdrücklich für Sicherung der Stetigkeit im Fortgange der geistigen Entwickelung der Menschheit geschaffene Anstalt, indem durch ihre Vermittelung mit Besonnenheit und nach fester Regel jedes Zeitalter seine höchste Verstandesbildung dem folgenden Zeitalter übergiebt, damit auch dieses sie vermehre, und in dieser Vermehrung seinem folgenden übergebe, und so fort bis an's Ende der Tage«.

Die Grösse der Idee wird niemand verkennen. Wenn aber Fichte fortfahrend die Universität als die wichtigste Anstalt und den heiligsten Besitz der Menschheit preist, als die sichtbare Darstellung der Unsterblichkeit unseres Geschlechts, der Einheit des Überweltlichen und Weltlichen, der Erscheinung Gottes, ja Gottes selbst, so mag wer kann, diese Überschwänglichkeit als Ausfluss eines schönen Enthusiasmus hinnehmen (in der That aber bezeichnet

sie eine der Stellen, wo Fichtes Idealismus die Grenze streift, jenseits welcher das Unbestimmte und Leere liegt), aber dies wird auch der eifrigste Verehrer Fichtes zugeben, in dem Staate, wie er ist, findet seine Universität keinen Platz. Und das sollte sie auch gar nicht nach seinem Willen; sie sollte, einmal errichtet, als eine dem Heil der ganzen Menschheit dienende Anstalt, unbeeinflusst von irgend einer staatlichen Einwirkung durch sich selbst bestehen und aus sich selbst sich fortentwickeln. Das waren auch nicht blos theoretische Ansichten. Fichte hat bekanntlich bei der Stiftung unserer Hochschule sehr bestimmte und wohldurchdachte Vorschläge umfassendster Art gemacht und mit der ihm eigenen Energie verfochten, welche auf die Realisirung seiner Idee hinzielten. Dass ihre Ausführung die Lebensfähigkeit der neuen Hochschule schon im Keime erstickt haben würde, bestreitet heutzutage kein Einsichtiger.

Ich komme zum Schluss. Die flüchtige Skizze, welche ich von der Geschichte des Universitäts-Wesens in Deutschland und den mit demselben unmittelbar zusammenhängenden Bewegungen auf dem Gebiete des wissenschaftlichen und sozialen Lebens zu geben versucht habe, selbstverständlich mit Beschränkung auf die mir als die wichtigsten erscheinenden Momente und ohne Anspruch, etwas Neues gesagt zu haben, sollte nur zeigen, wie die Universitäten von ihrem Ursprung an in beständiger Um- und Fortbildung begriffen und im Wesentlichen stets der Ausdruck des allgemeinen Kulturlebens der Zeit gewesen sind, so dass nichts ungerechter sein kann als der Vorwurf der Stabilität, der ihnen so oft gemacht worden ist. Kaum wird es noch nöthig sein, jetzt ausdrücklich darauf hinzuweisen, welche Läuterung die Idee der Universität durch die Gründung dieser Hochschule erfahren hat. Uber Zweck und Bedeutung der Universität als einer wissenschaftlichen, nicht blos zur Erwerbung von Fachgelehrsamkeit oder praktisch zu verwerthenden Kenntnissen und Geschicklichkeiten bestimmten Anstalt gingen die Ansichten der Urtheilsfähigen kaum noch auseinander. Es konnte keinem Zweifel unterliegen, dass den Rechten der Wissenschaft im vollsten Masse Genüge geschehen werde, wo ein Schleiermacher, Fichte, F. A. Wolf und vor allen ein W. von Humboldt an der Gründung einer Universität den wesentlichsten Antheil hatten. Aber es galt jetzt, die Anforderungen der Wissenschaft in einem höheren Sinne, als man früher versucht hatte, mit den An-

sprüchen und Bedürfnissen des Lebens auszugleichen; es musste der Versuch gemacht werden, die Universität in den Staatsorganismus so einzufügen, dass sie die Pflanzstätte einer wahrhaft höheren Bildung werde, in der sich Intelligenz und Sittlichkeit, ideales Streben und praktische Tüchtigkeit, wissenschaftlicher Geist und vaterländische Gesinnung zu einträchtigem Zusammenwirken vereinigen.

Das ist, wenn ich nicht irre, wahr und klar ausgedrückt, der »Stiftungsgedanke«, welcher unserer Hochschule den Ursprung gegeben und ihr im höchsten Sinne des Wortes den Charakter einer Staatsanstalt aufgeprägt hat.

Seine treibende und belebende Kraft hat er dadurch bewährt, dass in unserem deutschen Vaterlande jetzt alle Universitäten in einem Sinne und für einen Zweck zusammenarbeiten.

Friedrich Wilhelm der Dritte hat in seiner schlichten Weise diesen Zweck mit den Worten bezeichnet, die er kurz nach seinem Regierungsantritt an seinen Unterrichts-Minister richtete: »Die Schule soll den Menschen und Bürger bilden«. Denn etwas Anderes können und wollen auch in ihrer Sphäre die Universitäten nicht.

ZU E. E. KUMMERS FÜNFZIGJÄHRIGEM DOCTORJUBILÄUM.

(Im Auftrage der philosophischen Facultät der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin überreicht zum 10. September 1881.)

Hochverehrter Herr College!

Indem wir Ihnen zu Ihrem bevorstehenden fünfzigjährigen Doctorjubiläum, das zu unserem lebhaften Bedauern in eine Zeit fällt, wo Ihre Amtsgenossen und Freunde sich nicht in herkömmlicher Weise zu einer würdigen Feier des Tages vereinigen können, unsere wärmsten Glückwünsche darbringen, vergegenwärtigen wir uns mit freudiger Bewunderung, was Sie im Dienste der Wissenschaft Grosses und Dauerndes geleistet haben, und nehmen Theil an dem Gefühle reinster und vollster Befriedigung, mit der Sie auf das abgelaufene halbe Jahrhundert Ihres segenreichen Wirkens zurückblicken können.

Durch innere Neigung dem Studium der Mathematik zugeführt, erkannten Sie schon früh in der mathematischen Forschung Ihren eigentlichen Lebensberuf. Speculativ angelegt und darum an dem Besitz überlieferten Wissens allein kein Genügen findend, war Ihr Geist für productive wissenschaftliche Thätigkeit auf das glücklichste organisirt; mit dem Drange nach Erkenntniss des Grundes und Zusammenhanges der Wahrheiten verband sich in ihm die Fähigkeit, bei ausgedehnteren Untersuchungen die fundamentalen Fragen herauszufinden und auf deren Ergründung die ganze Kraft des Denkens zu concentriren, mit dem Eifer des Schaffens Stetigkeit und Sinn für planmässiges Arbeiten, mit idealem, auf das Höchste und Allgemeinste gerichteten Streben ein klarer Blick für das im concreten Falle Erreichbare und Nothwendige.

So ausgestattet mit allen Anlagen und Eigenschaften, die den Forscher kennzeichnen, und in strenger Arbeit geschult, gingen Sie alsbald zur selbständigen Production über, und zwar nach einander in drei Hauptgebieten der Mathematik, indem Sie in den ersten zehn Jahren, während Ihrer Thätigkeit als Gymnasiallehrer, hauptsächlich analytische Fragen behandelten, dann während eines noch längeren Zeitraumes fast ausschliesslich in die Theorie der Zahlen sich vertieften und zuletzt, zur Überraschung manches Fachgenossen, auch auf dem Gebiete der Geometrie die Vielseitigkeit Ihres Talentes bewährten.

Die durch Reichthum an fruchtbaren Ideen, Fülle neuer Resultate und lichtvolle Darstellung gleich ausgezeichneten Arbeiten, mit denen Sie auf jedem der genannten Gebiete die mathematische Literatur beschenkt haben, nach ihrem vollen Werthe zu würdigen, und den Einfluss nachzuweisen, den dieselben auf den Entwicklungsgang der Wissenschaft ausgeübt haben, namentlich in der denkwürdigen Epoche, wo ein Geschlecht jüngerer Mathematiker, das in dem Göttinger Altmeister sein Haupt und Vorbild verehrte, und als dessen einziger Repräsentant Sie jetzt dastehen, die Blütezeit der mathematischen Forschung in Deutschland herbeiführte, das ist die Aufgabe eines künftigen Geschichtsschreibers der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts. Wir begnügen uns, aus der grossen Reihe Ihrer Meisterwerke einige herauszugreifen, welche von besonders weitgehender Wirkung gewesen sind und Ihren Namen den Namen der berühmtesten Forscher auf dem Gebiete Ihrer Wissenschaft angereiht haben: aus den Productionen der ersten Zeit die vortreffliche Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, ferner aus denen der zahlentheoretischen Epoche die grossen Arbeiten, in denen Sie der Theorie der aus höheren Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen durch Einführung des Begriffs der idealen Zahl, Ihres Monumentum aere perennius, das Fundament geschaffen und mit der Entdeckung des Reciprocitäts-Gesetzes das Gebäude gekrönt haben, endlich aus den letzten Jahren die wichtigen Untersuchungen über die Singularitäten der Flächen, durch welche eine der interessantesten, aber auch verwickeltsten und am schwersten zugänglichen geometrischen Theorien wesentlich aufgehellt worden ist.

Wir würden indessen, hochgeehrter Herr College, Ihnen nur wenig gerecht werden, wenn wir es unterliessen, die unvergänglichen Verdienste,

welche Sie sich um die Verbreitung des mathematischen Wissens in unserem Vaterlande in verschiedenen Lebensstellungen erworben haben, gebührend hervorzuheben und dem Danke, den Ihre nach Tausenden zu zählenden Schüler Ihnen dafür schulden, vollen Ausdruck zu geben, wozu wir uns als Mitglieder der Facultät, die seit sechsundzwanzig Jahren in Ihnen einen ihrer bewährtesten und berühmtesten Lehrer verehrt, vor allen verpflichtet und berufen halten.

Die Erinnerung an die Zeit Ihrer Lehrthätigkeit am Gymnasium zu Liegnitz ist Ihnen immer besonders deswegen werth geblieben, weil Sie schon damals das Glück hatten, durch Ihren Unterricht und Ihr Beispiel eine Anzahl talentvoller Schüler für das Studium der Mathematik zu gewinnen, unter ihnen solche, die sich später als Forscher ersten Ranges bewährt haben.

Während Ihrer dreizehnjährigen Wirksamkeit an der Universität Breslau haben Sie dort eine mathematische Schule gegründet, welche wetteifernd mit der berühmten Königsberger Schule für die Belebung und gedeihliche Entwickelung des mathematischen Studiums in Deutschland Ungewöhnliches geleistet hat. Wenn noch heute die Schulen Schlesiens den Universitäten eine verhältnissmässig grosse Zahl von Studirenden der Mathematik zuführen, und diese Disciplin dort einer besondern Achtung sich erfreut, so sind darin noch Spuren Ihres Wirkens zu erkennen.

Glänzender und erfolgreicher noch hat sich indessen Ihre Lehrthätigkeit an unserer Universität entfaltet, wo Ihnen die Aufgabe geworden, die durch den Abgang Lejeune Dirichlets und Jacobis entstandene, schwer empfundene Lücke auszufüllen. Angezogen von der Gediegenheit des Inhalts Ihrer Vorlesungen, von der unübertrefflichen Klarheit Ihres Vortrags, von Ihrer Gabe, sich der Fassungskraft des Anfängers anzupassen, ohne der Strenge der Methode etwas zu vergeben, nicht minder endlich von dem Reize, den der Ihrem Wesen eigene und bei mündlicher Mittheilung noch mehr als in Ihren Schriften hervortretende ideale Zug auch dem sprödesten Stoffe verlieh, hat sich hier eine von Jahr zu Jahr angewachsene Schaar der ausgezeichnetsten Schüler um Sie versammelt, aus der die deutschen Universitäten und höheren Schulen ihre besten mathematischen Lehrer empfangen haben, und aus deren Tüchtigkeit und begeisterter Anhänglichkeit an Sie wir besser noch als aus ihrer grossen Zahl ermessen können, wie vollständig

die einst an Ihre Berufung geknüpften hohen Erwartungen sich verwirklicht haben.

Indem wir, verehrtester Herr College, Sie bitten, den Ausdruck unserer aufrichtigsten Hochschätzung und Anhänglichkeit freundlichst entgegennehmen zu wollen, gestatten wir uns hinzuzufügen, dass wir die Rüstigkeit und geistige Frische, mit der wir Sie täglich Ihres Amtes walten sehen, zu unserer innigsten Freude als eine Bürgschaft dafür betrachten, dass bei Ihnen der Eintritt in einen neuen Lebensabschnitt nicht zugleich den Abschluss Ihrer mit Erfolgen so reich gesegneten Wirksamkeit bezeichnen werde.

Dekan und Professoren
der philosophischen Facultät der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität.

VERZEICHNISS DER VON WEIERSTRASS AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN GEHALTENEN UND ANGEKÜNDIGTEN VORLESUNGEN.

(Die in Klammern gesetzten Ziffern bedeuten die wöchentliche Stundenzahl.)

Winter 1856—57.

Ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik, publice.

Sommer 1857.

Allgemeine Lehrsätze betreffend die Darstellung analytischer Functionen durch convergente Reihen, publice (1).

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (4).

Winter 1857—58.

Ausgewählte geometrische und mechanische mit Hülfe der elliptischen Functionen zu lösende Probleme, publice (2).

Theorie und Anwendung der trigonometrischen Reihen und bestimmten Integrale, welche zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen, privatim (3).

Sommer 1858.

Einige ausgewählte Kapitel der Integralrechnung, publice (2).

Neuere Geometrie, privatim (4).

Winter 1858—59.

Allgemeine Lehrsätze, betreffend die Darstellung analytischer Functionen durch unendliche Reihen, publice (1).

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (5).

Sommer 1859.

Die homogenen Functionen zweiten Grades mit beliebig vielen Veränderlichen, publice (2). (Nur angekündigt.)

Eine Anzahl ausgewählter, geometrischer und mechanischer Probleme mit Hülfe der elliptischen Functionen behandelt, privatissime und gratis (3). (Nur angekündigt.)

Winter 1859—60.

Die Formeln der analytischen Dioptrik, publice (1).
Einleitung in die Analysis, privatim (5).

Sommer 1860.

Einige ausgewählte Kapitel der analytischen Mechanik, publice (2).
Einleitung in die Analysis (Fortsetzung), privatissime und gratis (4).

Winter 1860—61.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1861.

Einige ausgewählte, mit Hülfe der elliptischen Functionen zu lösende Probleme der Geometrie und Mechanik, publice (4).

Winter 1861—62.

Über Flächen zweiter Ordnung, publice (2). (Nur angekündigt.)
Allgemeine Theorie der analytischen Functionen, privatim (4). (Nur angekündigt.)

Winter 1862—63.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1863.

Ausgewählte mit Hülfe der elliptischen Functionen zu lösende Probleme der Geometrie und Mechanik, publice (4).
Einleitung in die Theorie der Abelschen Functionen, privatim (3).

Winter 1863—64.

Allgemeine Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1864.

Neuere synthetische Geometrie, privatim (5).

Winter 1864—65.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1865.

Über Anwendungen der elliptischen Functionen auf geometrische und mechanische Aufgaben, publice (3).
Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1865—66.

Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1866.

Theorie der Abelschen Transcendenten, privatim (4).
Neuere synthetische Geometrie, privatim (4).

Winter 1866—67.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1867.

Anwendung der elliptischen Functionen auf geometrische und mechanische Probleme, publice (4).
Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1867—68.

Theorie der Determinanten und deren Anwendungen, publice (2).
Neuere synthetische Geometrie, privatim (4).

Sommer 1868.

Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Winter 1868—69.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1869.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (4).
Verschiedene Anwendungen der elliptischen Functionen, privatim (4).

Winter 1869—70.

Variationsrechnung, privatim (4).
Neuere synthetische Geometrie, privatim (4).

Sommer 1870.

Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Winter 1870—71.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (8).

Sommer 1871.

Neuere synthetische Geometrie, privatim (4).

Ausgewählte, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen zu lösende geometrische und mechanische Probleme, privatim (4).

Winter 1871—72.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (6).

Sommer 1872.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (4).

Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1872—73.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1873.

Elemente der neueren synthetischen Geometrie, privatim (4).

Ausgewählte, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen zu lösende geometrische und mechanische Probleme, privatim (4).

Winter 1873—74.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (6).

Sommer 1874.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Winter 1874—75.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1875.

Ausgewählte, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen zu lösende Probleme der Geometrie und Mechanik, privatim (4).

Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1875—76.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (6).

Sommer 1876.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Ergänzungen zur Theorie der Abelschen Functionen, privatissime und gratis (2).

Winter 1876—77.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1877.

Anwendung der elliptischen Functionen zur Lösung geometrischer und mechanischer Probleme, an ausgewählten Beispielen erläutert, privatim (4).

Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1877—78.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (6).

Sommer 1878.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (6).

Anwendung der Abelschen Functionen zur Lösung ausgewählter geometrischer Probleme, privatissime und gratis (2).

Winter 1878—79.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (6).

Sommer 1879.

Variationsrechnung, privatim (4).

Anwendung der elliptischen Functionen zur Lösung ausgewählter geometrischer und mechanischer Probleme, privatim (4).

Winter 1879—80.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (6).

Sommer 1880.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (6). (Nur angekündigt.)

Winter 1880—81.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (5).

Sommer 1881.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (5).

Winter 1881—82.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (5).

Sommer 1882.

Variationsrechnung, privatim (4).

Winter 1882—83.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (5).

Sommer 1883.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (5).

Winter 1883—84.

Theorie der Abelschen Functionen, privatim (5). (Nur angekündigt.)

Sommer 1884.

Variationsrechnung, privatim (5).

Winter 1884—85.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen, privatim (5).

Sommer 1885.

Theorie der elliptischen Functionen, privatim (5).

Winter 1885—86.

Ausgewählte Kapitel der Functionenlehre, privatim (4). (Nur angekündigt.)

Sommer 1886.

Ausgewählte Kapitel aus der Functionentheorie, privatim (5).

Winter 1886—87.

Theorie und Anwendung der bilinearen und quadratischen Formen, privatim (3).

Sommer 1887.

Theorie der hyperelliptischen Functionen, privatim (5).

Winter 1887—88.

Variationsrechnung, privatim (4 1/2). (Nur angekündigt.)

Winter 1888—89.

Grundbegriffe und Hauptsätze der Functionenlehre, privatim (3). (Nur angekündigt.)

Winter 1889—90.

Variationsrechnung, privatim (3).

ANMERKUNGEN.

Zu S. 175.

Ein kurzer Bericht über den auf der 32. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte gehaltenen Vortrag steht im Tageblatt dieser Versammlung (Wien 1856), S. 147.

Zu S. 251.

Die in der Anmerkung genannten Stellen der Monatsberichte der Berliner Akademie enthalten nur folgende Bemerkungen:

Monatsberichte v. J. 1859, S. 758. 12. December. Herr Weierstrass liest eine Abhandlung: Beiträge zur Theorie der Gleichungen.

Monatsberichte v. J. 1868, S. 428. 9. Juli. Herr Weierstrass liest über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Die auf S. 251—269 abgedruckte Abhandlung ist am 21. Februar 1889 in der Akademie vorgetragen worden.

K.

Der Inhalt des vorliegenden Bandes ist bis auf die Nummern 18—21, 23 und 26 des Inhalts-Verzeichnisses von Weierstrass selbst für den Abdruck bestimmt worden. Von einer Aufnahme der Note zu Kummers Abhandlung „Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen“ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64 (1865), S. 77—78; abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863), wurde abgesehen, weil sie nach Weierstrass' Absicht durch den Text auf S. 180 ersetzt worden ist.

Die Mehrzahl der Abhandlungen ist einer sachlichen Durchsicht unterworfen worden, und zwar durch die Herren G. Frobenius (Nr. 5), G. Hettner (Nr. 21), H. v. Mangoldt (Nr. 1, 3, 4, 17), R. Rothe (Nr. 2, 6, 7, 13, 14, 18), Ludwig Schlesinger (Nr. 19), H. A. Schwarz (Nr. 10, 13, 15, 16), die auch mindestens eine Correctur des von ihnen geprüften Textes gelesen haben. Ausserdem hat Herr R. Rothe die Bogen 1—30 corrigirt, Herr C. Barich dieselben Bogen in typographischer Hinsicht durchgesehen.

Das Vorlesungs-Verzeichniss (Nr. 26) hat Herr R. Ziegel aus den Akten der Universitäts-Quaestur ausgezogen. Wievielstündig die Vorlesung im Winter 1856—57 gehalten worden ist, hat sich nicht feststellen lassen.

Die Anmerkungen ohne Unterschrift rühren von Weierstrass, die mit K. unterschriebenen von dem unterzeichneten Herausgeber her.

J. Knoblauch.

ANMERKUNGEN zu Band I und II.

Zu Bd. I, S. 257—266.

Über das Problem der kürzesten Linien auf den Flächen zweiter Ordnung hat Weierstrass der IV. Section der 36. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Speyer am 21. September 1861 eine Mittheilung gemacht, die in der Beilage zum Tagblatt dieser Versammlung, S. 34—36, abgedruckt ist.

Zu Bd. I, S. 356 und Bd. II, S. 363.

An der Durchsicht der Abhandlungen Bd. I, Nr. 2—4 und Bd. II, Nr. 2, 4 und 6 ist Herr E. Wendt betheiligt gewesen. K.

Berichtigungen zu Band I, II und IV.

Bd. I S. 5 Z. 11 lies $\frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}$ statt $\frac{k^2 \operatorname{sn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}$.

S. 6 und 7 lies überall Al statt D.

S. 116 Z. 5 v. u. lies $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{t}}$ statt $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$.

Z. 4 v. u. lies $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}}$ statt $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}}$ und $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}$ statt $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\tau}}$.

S. 157 Z. 2 lies § 2 statt § 8.

Z. 5 v. u. ist das Wort „positive“ zu streichen.

Bd. II S. 46 Z. 7 v. u. lies $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ statt $\varphi_1, \ldots \varphi_n$.

S. 47 (d) lies $R_\nu(x, \chi x)$ statt $R_\nu(x)$.

(e) lies $F(x, \chi x)$, $F_1(x, \chi x)$, $F_n(x, \chi x)$ statt $F(x)$, $F_1(x)$, $F_n(x)$.

S. 76 Z. 6 lies $\mu + \nu = e - 1$ statt $\mu + \nu = e$.

(5.) lies $\mu + \nu = e_\lambda - 1$ statt $\mu + \nu = e_\lambda$ (zweimal)

und $\mu + \nu = e_\lambda - 2$ statt $\mu + \nu = e_\lambda - 1$.

Bd. IV S. 13 Z. 9—10 sind die Worte „deren Coefficienten .... zusammengesetzt sind“ zu streichen.

S. 20 Z. 10—12 sind die Worte „und dass in keinem .... haben“ zu streichen.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).

0

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
3
W45
Bd.3

Weierstrass, Karl Theodor
Wilhelm
Mathematische Werke

Physical &
Applied Sci.